

Региональный этап ВсОШ

по математике 2021 год

1 день

Шифр: 1101

Таблица для жюри

1	2	3	4	5	Сумма
5 Д.А.	7 Д.А.	0 Д.А.	X	0 3	12
5	7	0	0	0	12

40

~ 11.1

Найдем наименьшее общее кратное (далее НОК) для чисел 40 и 625
 $40 = 5 \cdot 2^3$; $625 = 5^4 \Rightarrow$ НОК 40 и 625 равен $5^4 \cdot 2^3 = 5000$

Пусть $\alpha > 1000000$, $\alpha \in \mathbb{N}$, $\alpha \equiv m \pmod{40}$, $\alpha \equiv m \pmod{625}$, $m \in \mathbb{Z}$
 тогда $\alpha = 40n + m = 625k + m$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$,
 причем $0 \leq m \leq 39$, потому что $\pmod{40}$ и $\pmod{625}$,
 тогда α также можно представить в виде $5000x + m$, 5000 - НОК для
 625 и 40, $x \in \mathbb{N}$.

Так как $0 \leq m \leq 39$, то число $5000x + m$ будет иметь разницу
 максимум в два последних разряда с числом $5000x$, а значит
 разряд тысяч числа $5000x + m$ идентичен разряду тысяч числа
 $5000x$. Число $5000x$ имеет цифру 0 и 5 в разряде тысяч.
 может иметь только

Ответ: 0 и 5 5 баллов

~ 11.2

Предположим, $xy = 0$, $x \neq 0$, $y \neq 0$ (по условию), получается
 противоречие $\Rightarrow xy \neq 0$

Предположим $xy > 0$

$$(x^4 - y^4) = (x - y)(x + y)(x^2 + y^2) > x$$

$$(y^4 - x^4) = (y - x)(y + x)(y^2 + x^2) > y$$

перемножим неравенства

$$(x - y)(x + y)(x - y)(y - x)(x + y)^2(x^2 + y^2)^2 > xy$$

так как x и y ненулевые, то $(x + y)^2 \geq 0$, $(x^2 + y^2)^2 \geq 0 \Rightarrow (x - y)(y - x) > 0$
 заметим, что

$$(x - y)(y - x)$$

Если $x = y$, то $(x - y)(y - x) = 0$

Если $x > y$, то $(x - y)(y - x) < 0$

Если $y > x$, то $(x-y)(y-x) < 0$

Получается, что $(x-y)(y-x)(x+y)^2(x^2+y^2)^2 \leq 0$

Тогда $xy < 0$, противоречие

Рассмотрим один вариант: $xy < 0$, докажем, что он возможен.

Пусть $x = -2$, $y = -2$, тогда

$$\begin{cases} 16 - 16 > -2 \\ 16 - 16 > -2 \end{cases}$$

Система справедлива при x и y , удовлетворяющих условию.

~ 11.2

$$\begin{cases} x^4 - y^4 > x \\ y^4 - x^4 > y \end{cases}$$

Сложим неравенства, получим $x + y < 0$ 18.

Рассмотрим

Предположим, $xy = 0$, тогда $x = 0$ и/или $y = 0$, противоречие $\Rightarrow xy \neq 0$

Предположим, $xy < 0$, тогда

Пусть $x < 0$, $y > 0$

рассмотрим второе неравенство из системы в преобразованном виде

$$(x-y)(x+y)(x^2+y^2) < -y < 0$$

$x-y < 0$, $x^2+y^2 > 0$, тогда $x+y > 0$, противоречие

Пусть $x > 0$, $y < 0$

рассмотрим первое неравенство

$$(y-x)(x+y)(x^2+y^2) < -x < 0$$

$y-x < 0$, $x^2+y^2 > 0$, тогда $x+y > 0$, противоречие

Значит xy не меньше 0

Случай $xy > 0$ возможен, например при $x = -1, y = -1$

$$\begin{cases} (-1)^4 - (-1)^4 = 0 > -1 \\ (-1)^4 - (-1)^4 = 0 > -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-1)^4 - (-1)^4 = 0 > -1 \\ (-1)^4 - (-1)^4 = 0 > -1 \end{cases} \text{ за пример больше не приводится}$$

Ответ: знак + 7 баллов

11.5

Статус оценим k

Пусть $k \in [0; 49]$, тогда город можно разделить на области

A-I следующим образом

x			y
	A	B	C
	D	E	F
	G	H	I

Рассмотрим случай, когда все рыцари живут в A, E, F, H, I, ^{остальные же} Знаяка живет в доме $(1, 1)$, а жюри находятся в городе и пытаются вывести на дом $(99, 1)$, назовём его ^{ис} домом X, Y соответственно. В таком случае невозможно однозначно определить какой из домов X, Y принадлежит Знаяке, потому что области A, I выводят на X, G, C на Y (A равносильна I, G, C), D выводит на Y, F на X ($D = F$). Показания жителей B, E, H не учитываются, потому что из этих домов одинаковые расстояния (попарно до X, Y). Следовательно $k \geq 50$, потому что иначе можно привести случай выше.

При $k = 50$ на каждой улице живёт большинство рыцарей

Сначала проходим по всем домам и заполняем те, где ответ 0. Рассмотрим это множество, перебирая $\times$ пары элементов и выбирая тот за которое ^{мы} больше голосов. За дом z значки будет минимум $50 \cdot 99$ голосов (иначе найдётся улица, где будет меньше 50 жителей) - это 4950, за ложный дом соответственно максимум $4851 + 99$ (99 домов могут быть улицей между домами X, Y с попарно равными расстояниями до X, Y). Поэтому однозначно определить всё ещё нельзя.

Мы собираем не голоса с адресом, а расстояния, Аветиско не считает n ^{соответствует} не меньше 2 точек

При $k=51$ возможно. Пользуемся всё той же стратегией, но теперь за дом значки будет уже минимум $51 \cdot 99$ голосов, то есть попарно описывая элементом множества можно а за любой другой уже максимум $49 \cdot 99$.

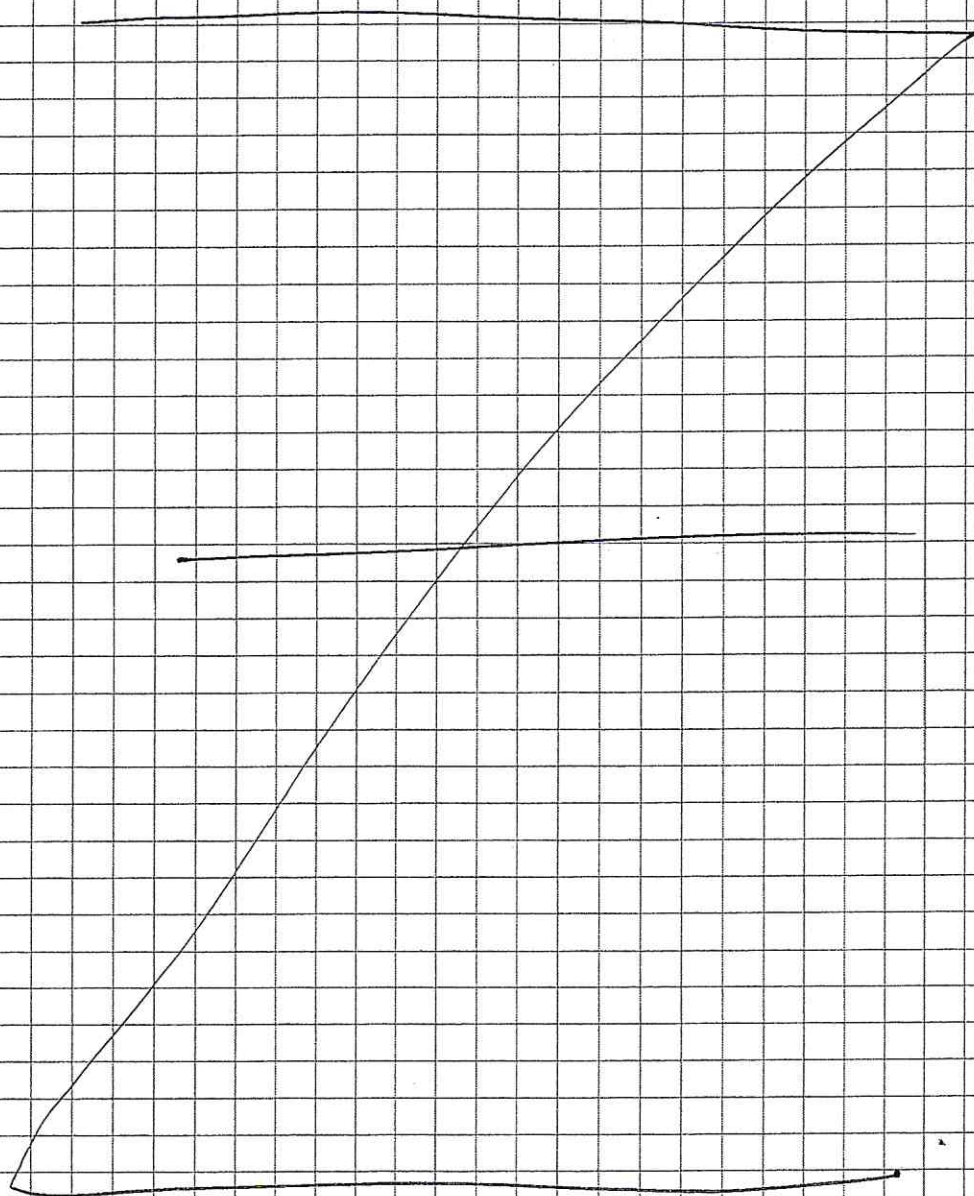
Ответ: 51

Есть конкретный пример, для $n=74$ (но для возможности стрелки в одну сторону).

~ 11.3

Рассмотрим две квадратичные функции, которые имеют пересечения $a_1x^2 + b_1x + c_1$ и $a_2x^2 + b_2x + c_2$, найдём число пересечений их графиков $(a_1 - a_2)x^2 + (b_1 - b_2)x + (c_1 - c_2) = 0$, это тоже квадратичная функция она имеет 0, 1 или 2 решения, поэтому точек пересечения максимум 2. В данном случае (условие задачи) ^{это или из условия} параболы имеют хотя бы 1 точку пересечения в каждой паре (ветви направлены вверх). Учитывая данный факт, приходим к выводу, что 19799 пар имеют вторую точку пересечения, а 101 пара не имеет. Если параболы имеют в одну точку пересечения, то их графики

0 баллов



Региональный этап ВсОШ

по математике 2021 год

2 день

Шифр: 1101

Таблица для жюри

	6	7	8	9	10	Сумма
Σ _{ПК}	7	78	35	X	0	17
	7	7	3	X	0	17 50

11.6

1) Заметим, что рядом с 1 стоит 4, рядом с 4 стоит 7, ... рядом с 76 стоит 79, то есть числа можно объединить в группу вида $1+3n$, $n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$. Назовём её „группа остатка 1“

Аналогично можно создать группу остатка 2 и остатка 0.

2) Числа ^{каждой} группы выстраиваются в „перва“ (по условию соседства). Таким образом поле 9×9 заполнится 3 первами (группа остатка 0, 1 и 2)

3) Поле квадратное, у него 4 угла. По принципу Дирихле найдется пара углов принадлежащих одной группе. Разность чисел этой группы кратна 3 т.к. числа одной группы сравнимы по модулю 3.

Рассмотрим эти 2 угла.

Случай 1: углы соседние (X и Y)

Рассмотрим B таком случае можно представить маршрут из X в Y как набор попутных ($\vec{XY}$ и $\vec{YX}$) и поперечных ($\pm \vec{\alpha} \perp \vec{XY}$) векторов. Длина попутных равна 8 $\Rightarrow$ попутных векторов чётное число ~~выражается как $2k$ и $2l$ в~~ Длина поперечных равна 0 $\Rightarrow$ поперечных чётное число. Таким образом, маршрут $X \rightarrow Y$ чётной длины, а значит разница между числами в углах равна $3n \cdot 2 = 6n : 6$

Случай 2: углы противоположные (X и Z)

Также представим маршрут в виде векторов (вертикальных и горизонтальных). Длина вертикальных равна длине горизонтальных равна 8 - чётное число (Примечание: вектор $\vec{XZ}$ ^{всегда} имеет положительные координаты, потому что так проводится ось X , то есть по ситуации) Таким образом, маршрут $X \rightarrow Z$ чётной длины,

а значит разность между числами в этих углах равна $3n \cdot 2 = 6n : 6$

То есть такие 2 угловые клетки найдутся в любом случае.

Ответ: верно

11.8

Пусть у некоторого слова длина $2n+2$ при алфавите n букв. В этом случае в первых $(n+1)$ буквах найдутся ^{хотя бы} две одинаковые (по принципу Дирихле). Аналогично в последних $(n+1)$ буквах также найдутся хотя бы две одинаковые, причем различные с теми, что были в первой половине слова. Назовем их a и b .

Рассмотрим случай, когда такая буква стоит на $(n+1)$ -м месте:

В этом случае $(n+2)$ -я буква (b) отличается от a . Осталось n букв. Если среди них есть повторяющиеся ^(или), то слово плохое т.к. можно зачеркнуть все буквы и оставить a и b . Если повторяется a , то можно оставить b и a . Иначе если оставшиеся буквы не повторяются, то каждая из них встречается, причем только один раз, в том числе и b , которая стоит также на $n+2$ месте. Это слово также плохое. Таким образом слово длины

$2n+2$ плохое. Аналогично в случае, если a стоит раньше чем на $n+1$ месте. За ней следом идет b и более, чем n букв, где будут повторения, аналогично случаю выше.

Докажем, что можно составить хорошее слово длины $2n+1$.

Первые n букв идут в алфавитном порядке, далее a , далее n букв в алфавитном порядке, далее a и b . Получается слово вида

$a \dots a b \dots a b$

Первая половина слова ^(n+1 буква) содержит 2 буквы a , все остальные буквы встречаются 1 раз. Остальные n букв идут без повторений. Это слово хорошее.

Ответ: $2n+1$

Не помню, что такое α

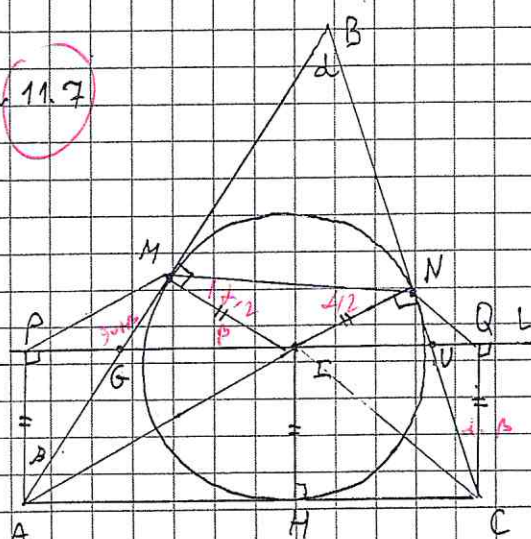
11.10

Предположим, целые числа будут появляться всё время. В таком случае всегда будет появляться число $m, m \in \mathbb{Z}$, которое будет больше всех ранее полученных ^{целых} значений x, y, z (так как по условию x, y, z возрастают). Все суммы чисел, содержащие ^{при возрастании m} слагаемое с дробью со знаменателем $(\frac{1}{\alpha m})$ будут стремиться к 0, а суммы к некоторым числам k и n , которые никогда не будут достигнуты. Соответственно третьи оставшиеся из ^{чисел} ~~оставшихся~~ также будут стремиться к некоторому значению α . А значит никакое из целых чисел больше k, n, α никогда не может быть достигнуто. Получаем противоречие. Доказано обратное.

т.т.д.

Нет реш.

11.7



- 1 Пусть $\angle ABC = \alpha$, $\angle PAG = \beta$.
- 2 $MI = IN = IH = R \Rightarrow \triangle MIN$ равноб., $\angle MIN = 180^\circ - \alpha$, $\angle IMN = \angle MNI = \frac{1}{2} \alpha$
- 3 $APQC$ - прям $\Rightarrow IH = PA = QC$ (т.к. IH высота)
- 4 рассмотрим $\triangle APQ$ и $\triangle GMI$ - прям:

$AP = MI$ $\angle PAG = \angle MIP = \beta$ $\angle PGA = \angle MGI$	}	$\Rightarrow \triangle APQ = \triangle GMI \Rightarrow APMI$ - равноб. трапеция
---	---	---

5 рассм $APMI$:

$$\angle PGA = 90^\circ - B; \angle PGM = 90^\circ + B \Rightarrow \angle PMG = \angle MPG \text{ (т.к. равнобедренный)}, \angle PMG = 45^\circ - \frac{1}{2}B$$

6 аналогично $\triangle NUI \cong \triangle CUG \Rightarrow INQC$ - равнобедренная.7 рассм $\triangle ABC$: $\angle BCA = 180^\circ - \angle - (90^\circ - B) = 90^\circ - \angle + B$

$$\angle NCQ = 90^\circ - \angle BCA = 90^\circ - 90^\circ + \angle - B = \angle - B$$

8 рассм $INQC$ - равнобедренная:

$$\angle CUQ = 90^\circ - \angle NCQ = 90^\circ - \angle + B$$

$$\angle NUQ = 180^\circ - \angle CUQ = 180^\circ - 90^\circ + \angle - B = 90^\circ + \angle - B$$

$$\triangle NQU \text{ - равнобедренная (т.к. равнобедренная)} \Rightarrow \angle UNQ = \angle NQU = \frac{180^\circ - 90^\circ - \angle + B}{2} = 45^\circ - \frac{1}{2}\angle + \frac{1}{2}B$$

9 рассм $PMNQ$:

$$\angle PMN = \angle PMG + \angle GMI + \angle IMN = 45^\circ - \frac{1}{2}B + 90^\circ + \frac{1}{2}\angle$$

$$\angle NQP = 45^\circ - \frac{1}{2}\angle + \frac{1}{2}B$$

$$\angle PMN + \angle NQP = 180^\circ \Rightarrow PMNQ \text{ - вписанный} \Rightarrow M, N, P, Q \text{ лежат на одной}$$

окружности

ч.т.д.

75

