

Региональный этап ВсОШ
по математике 2021 год

2 день

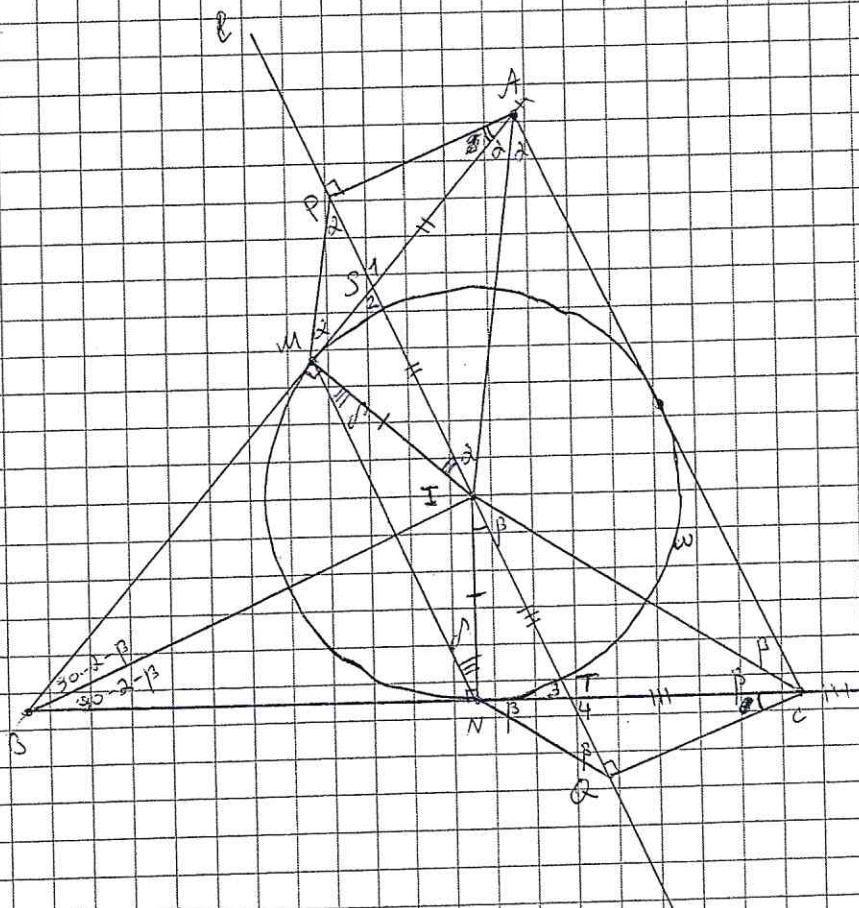
Шифр: 1102

Таблица для жюри

6	7	8	9	10	Сумма
7	7	3	4	X	17
7	7	3	0	X	17

get
7/1

Задача 11.7.



Дано:

$\triangle ABC$ — остроуг.,
 ω — впис. окружность

I — центр ω

M и N — точки кас. ω и AB и BC

$AP \parallel AC$, $IQ \parallel BC$

$AP \perp IQ$

Р-ть: M, N, P, Q лежат на одной окружности.

Док-во:

$IM \perp AB$ и $IN \perp BC$ (т.к. M, N — точки кас.);

Соединим точки M и N , P и M , N и Q , а также точки C и I , A и I , B и I .

Т.к. I — центр ω , то I — точка пересечения биссектр. $\Rightarrow \angle MAI = \angle CAI = \alpha$,
 $\angle ACI = \angle BCI = \beta$; $\angle MBI = \angle NBI = \frac{180^\circ - 2\alpha - 2\beta}{2} = 90^\circ - \alpha - \beta$ (т.к. $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$)

Т.к. $AP \parallel AC$, то $\angle CAI = \angle AIP = \alpha$; $\angle ACI = \angle QIC = \beta$. Значит
 $\triangle AIS$ и $\triangle CIT$ — равнобедр. по двум равным углам ($S = AM \cap PI$; $T = CN \cap IQ$)

$MI = NI$ (радиусы ω) $\Rightarrow \triangle SMI \cong \triangle TNI$

$\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$ (вертикальные) $\Rightarrow \angle PAS = 90^\circ - \angle 1 = 90^\circ - \angle 2 = \angle SIM$,

$\angle NIT = 90^\circ - \angle 3 = 90^\circ - \angle 4 = \angle QCT$

Отсюда получаем, что P, A, I, M — впис. ч-х и Q, C, I, N — впис. ч-х ($\angle PAS = \angle SIM$ и опираются на одну дугу).

PM) и точке NICQ - впис. 4-уг. ($\angle NIT = \angle QCT$ и опир. на NQ). Значит $\angle MPI = \angle MAI = \alpha = \angle SIA = \angle SMP$.

Также $\angle QIC = \angle QNC = \beta = \angle ICN = \angle IQN$

$$\angle NMI = \angle MNI = \delta$$

Рассмотрим углы в 4-х уг. MNQP:

$$\angle PMN = \alpha + \beta + \delta; \angle MPQ = \alpha; \angle PQN = \beta; \angle QNM = \beta + \alpha + \delta$$

$$\text{Сумма всех углов 4-х уг. MNQP} = 2\alpha + 2\beta + 2\delta + 180 = 360$$

$$\text{Значит } \alpha + \beta + \delta + 90 = 180 = \angle MPQ + \angle QNM \Rightarrow \text{MNQP - впис.}$$

4-х уг. $\Rightarrow$ точки M, N, Q, P лежат на одной окружности, что и требовалось доказать.

Задача 11.6.

С точки зрения геометрии на 3 вех линии (в т.ч. от 1 до 81) можно разбить на 3 группы: $3k; 3k-1; 3k-2$ (где $k \in \mathbb{N}$)

~~В каждой из этих групп ровно по 27 чисел. Среди 4-х угловых~~

клеток обязательно содержится 2 клетки, лежащие в одной и той же группе с точки зрения геометрии на 3 (т.к. клеток 4, а групп 3)

3). Возможны 2 случая: 1) либо обязательно

в одной группе будут клетки противоположных углов (например X и Z) 2) либо обязательно в одной группе будут клетки двух "соседних" углов (например X и Y).

В первом случае, чтобы сложиться в противоположные углы (в табл. 3x3) нужно сложить 16 чисел

(или 16+2k чисел). Во втором случае нужно сложить 8 чисел

целей (или $8+2k$ смещений). Дополнительное смещение $2k$ появляется, потому что смещение происходит на чётное число ячеек вправо/влево и вверх/вниз. В обоих случаях нужно сместиться на чётное число ячеек. (*)

По условию, любые 2 числа, отстоящие на 3, стоят в соседних по строке ячейках. Это значит, что перемещаясь в соседнюю ~~по~~ по строке ячейку число увеличивается (или уменьшается) на 3. Сместившись на m ячеек (внутри одной группы) число изменится на $3m$. Чтобы перейти из одной группы таблицы в другую нужно сместиться на чётное число ячеек, а также на число ячеек кратное 3, т.е. на число ячеек кратное 6 (на 6 ячеек).

Пусть в одной из ячеек было число N , а в другой ^{у той же} ячейке той же группы (с такой же разностью на 3) число $N \pm 6r$. Их модуль разности $|N - (N \pm 6r)| = 6r$, т.е. делится на 6. Таким образом, обязательно найдётся 2 ячейки, разность чисел в которых делится на 6.

Ответ: да.

Задача 11.8.

Пусть многочлен $P(x)$ имеет вид:

$$P(x) = x^{10000} + ax^{9999} + bx^{9998} + cx^{9997} + \dots + yx + z$$

То есть: $R(x) = P(x^{1000} + 1) - P(x)^{1000}$

$$R(x) = (x^{1000} + 1)^{10000} + a(x^{1000} + 1)^{9999} + b(x^{1000} + 1)^{9998} + c(x^{1000} + 1)^{9997} + \dots + y(x^{1000} + 1) + z - (x^{10000} + ax^{9999} + bx^{9998} + cx^{9997} + \dots + yx + z)^{1000}$$

$$\alpha = 1 + x^{1000} + x^{2000} + x^{3000} + \dots + x^{10,000,000}$$

$$\beta = a(1 + x^{1000} + x^{2000} + \dots + x^{3333000})$$

$$\gamma = b(1 + x^{1000} + x^{2000} + \dots + x^{3338000})$$

$$\delta = c(1 + x^{1000} + x^{2000} + \dots + x^{3337000})$$

$$\tau = y(1 + x^{1000})$$

$$w = z$$

$$\sigma = (x^{10000} + ax^{3333} + bx^{3337} + (x^{3337} + \dots + yx + z)^{1000})$$

$$R(x) = (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \dots + \tau + w) - \sigma$$

$$R(x) + \sigma = x^{10,000,000} + (a+1)x^{3333,000} + (a+b+1)x^{3337,000} + (a+b+c+1)x^{3337,000} + \dots + (a+b+c+\dots+y+1)x^{1000} + (a+b+c+\dots+y+1+z)$$

Задача 11.8.

Анализ: $n > 1$ букв, знак $\dots$ означает наличие сколь угодно букв или их отсутствие (напр. $a\dots$ это a или a^2).

~~Задача~~ Максимальное кол-во букв в коротком слове $2n+1$

~~Задача~~ ~~Почему не может быть пример:~~ Пример:

+ а всегда, а всегда. а в этом слове в разрыве вычеркиваем не может получиться конструкция aa^2 т.е. это слово хорошее.

Докажем почему не может быть больше букв слове, в котором

~~Задача~~ в слове, содержащем $2n+1$ букв, используются

n различных букв. Это значит что хотя бы одна из букв встретится в слове не менее 3-х раз (для удобства будем использовать буквы a)

$$(1) \quad \underbrace{a \dots a \dots a \dots a}_{3\text{-х раз}}$$

случай для
3-х раз

$$(2) \quad \underbrace{a \dots a \dots a \dots a \dots a \dots a}_{k \text{ раз}}$$

случай для
 k раз

... а ... в ... а ... в ... а или ... а ... в ... а ... а ... в Для посередин-
ных букв аналогично рассмотренному уже случаю.

Заявления а.а.а... В... Дополнение к делу № 08-09-000000
Вузы в возможно без нарушения условия в обоих случаях

ЛИСТ № 5 ИЗ 6

$$x \leq x + \frac{1}{y^2}, \quad y \leq x + \frac{1}{y^2} > 0, \quad y \neq 0$$

Региональный этап ВсОШ

по математике 2021 год

1 день

Шифр: 1102

Таблица для жюри

1	2	3	4	5	Сумма
75 Д.А.	7 Д.А.	0 Д.А.	X	X	12
7 Гер	7	0	X	X	14 Гер.

Задача 11.1

$$n \in \mathbb{N}, n > 1.000.000$$

$$n \equiv x \pmod{40}, \text{ где } x - \text{остаток от деления (знают } x \leq 38)$$

$$n \equiv x \pmod{625}$$

цифры 8 разряде
тысяч = ?

Решение:

$$\begin{cases} n = 40\alpha + x \\ n = 625\beta + x \end{cases}, \text{ где } \alpha \text{ и } \beta - \text{неполные частные от деления на } 40 \text{ и } 625 \text{ соответственно}$$

Найдём не само число n , а число n и само его остаток x , т.е. число $n - x$. Тогда $n - x = 40\alpha = 625\beta$. Число $n - x$ (где $x \leq 38$) делится и на 40, и на 625. Выразим α через β :

$$\alpha = \frac{625}{40}\beta = \frac{125}{8}\beta. \text{ Т.к. } \alpha \text{ и } \beta - \text{натуральные числа (125 и 8 - взаимно простые)} \\ (\neq 0, \text{ т.к. } n > 1.000.000), \text{ то } \beta = 8k, \text{ где } k \in \mathbb{N}. \text{ Тогда } \alpha = \frac{125}{8} \cdot 8k = 125k. \text{ А значит } n - x = 40\alpha = 5000k. +$$

Отсюда найдём само число n :

$n = 5000k + x$, где $x \leq 38$ (т.е. не влияют на разряд тысяч). При нечётных k цифра 8 разряда тысяч это 0, при чётных k цифра 8 разряда тысяч это 5. (5000 + x, 10.000 + x, 15.000 + x и т.д.). Т.к. число $n > 1.000.000$, число $k \geq 200$. ~~Нет примера~~

Ответ: 0 или 5.

5 баллов

+ уст.

Задача 11.2.

$$x \neq 0, y \neq 0$$

$$x^4 - y^4 > x \quad (1)$$

$$y^4 - x^4 > y \quad (2)$$

$$\Rightarrow x + y < 0 \quad (3) \quad (\text{при сложении (1) и (2)}) \quad 18.$$

$$xy \geq 0$$

Решение:

1) $xy \neq 0$

Если бы $xy = 0$, то либо $x = 0$, либо $y = 0$, что противоречит
 бы условию. Значит $xy \neq 0$ +

2) При $x = y = -\frac{1}{2}$ произведение $xy = \frac{1}{4} > 0$, т.е. $xy > 0$. Проверка.

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^4 - \left(-\frac{1}{2}\right)^4 > -\frac{1}{2} \quad (\text{слева } = 0, \text{ справа } < 0, \text{ это верно}).$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^4 - \left(-\frac{1}{2}\right)^4 > -\frac{1}{2} \quad \text{да, пример больше не находится}$$

3) Докажем, что произведение xy не может быть отри-
 цательным. Предположим, что это так ($xy < 0$). Рассмотрим
 все варианты:

а) $x > 1$ Тогда $x^4 > x > 1 > 0$ (*) и $y < 0$. Преобразуем (3):

~~$$x^4 - x > y^4 \Rightarrow y^4 < x^4 - x < x^4 \Rightarrow y < -x < -1 < 0 \Rightarrow y^4 > x^4 \quad \text{Значит}$$~~

~~$y^4 > x^4$~~ Из (3) получим $y < -x < -1$ значит $y^4 > x^4$. С другой
 стороны из (1): $y^4 < x^4 - x < x^4$ (т.к. $x > 0$). Противоречие, зна-
 чит при $x > 1$ произведение xy не может быть отрицательным. +

б) $x = 1$. Тогда из (1): $1 - y^4 > 1 \Rightarrow y^4 < 0$, что невозможно. +

в) $0 < x < 1$. Тогда $0 < x^4 < x < 1$ и $y < 0$. Тогда $x^4 - x < 0$.

А значит из (1): $0 > x^4 - x > y^4$, что невозможно. +

2) $-1 < x < 0$. Тогда $-1 < x < x^4 < 0$ и $y > 0$. Значит

$$0 < y < -x < 1 \quad \text{т.к. } 0 < y < 1, \text{ то } 0 < y < y^4 < 1 \Rightarrow y - y^4 > 0$$

Из (2) $-x^4 y - y^4 > 0 \Rightarrow x^4 < 0$, что приводит к противоречию.

г) $x = -1$ Подставив, получим:

$$\begin{cases} 1 - y^4 > -1 \\ y^4 - 1 > y \end{cases} \text{ (4) Сложим: } y - 1 < 0 \Rightarrow y < 1. \text{ Также } y > 0. \text{ А значит: } 0 < y^4 < y < 1 \Rightarrow y - y^4 > 0. \text{ Но из выражения (4) получаем } y - y^4 < -1 < 0, \text{ что опять приводит к противоречию.}$$

д) $x < -1$. Тогда $|x| > 1$ и $y > 0 \Rightarrow x^4 > |x| > 1$

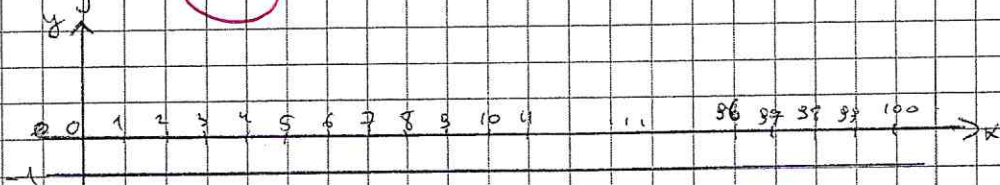
Из (3): $y < -x$, значит $0 < y < -x \Rightarrow |x| > |y| \Rightarrow x^4 > y^4 \Rightarrow x^4 - y^4 > 0$

Из (2) $y^4 - x^4 > y > 0 \Rightarrow x^4 - y^4 < 0$, что приводит к противоречию.

Итак, ~~все случаи~~ все случаи для ненулевых x ~~приводят к противоречию~~ приводят к противоречию, а значит предположение о том, что $xy < 0$ неверно и $xy > 0$.

Ответ: $xy > 0$ (знак больше). 7 баллов

Задача 11.3



Запишем общий вид параболы $f(x) = a(x-m)^2 + n$, где

$\frac{1}{2}$ разный задачи $n = -1$; $m \in (0; 100)$ с шагом 1, ~~не верно~~ $a \in (\frac{1}{2}, 50)$ с шагом $\frac{1}{2}$. ~~каверно~~

Назовём параболой одного типа те параболы, у которых значения a одинаковы (при $n = -1$).

Докажем, что параболы одного типа имеют 1 общую точку (при различных m, a), а параболы разных типов имеют 2 общие точки. ~~это что вернее~~ ~~приводит к противоречию~~ ~~последующим~~ Запишем уравнения для двух парабол одного типа:

$$f_1(x) = a(x-m_1)^2 - 1$$

$$m_1 \neq m_2 \quad a \neq 0$$

$$f_2(x) = a(x-m_2)^2 - 1$$

Найдем точки пересечения, приравняв $f_1(x)$ и $f_2(x)$:

$$a(x-m_1)^2 - 1 = a(x-m_2)^2 - 1 \Rightarrow (x-m_1)^2 = (x-m_2)^2. \quad \forall k.$$

$m_1 \neq m_2$, то $x-m_1 = m_2-x \Rightarrow x = \frac{m_1+m_2}{2}$, т.е. получаем

единственную точку с координатами по Ox : $x = \frac{m_1+m_2}{2}$.

Заметим, что параболы разных типов при одинаковых значениях m имеют 1 общую точку (вершину параболы). Значим уравнения парабол: $f_1(x) = a_1(x-m)^2 - 1$

$$f_2(x) = a_2(x-m)^2 - 1. \quad \text{Найдем точки пересечения: } f_1(x) = f_2(x).$$

$$a_1(x-m)^2 - 1 = a_2(x-m)^2 - 1 \quad \text{С учетом того, что } a_1 \text{ и } a_2 > 0:$$

$$|x-m| = \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} |x-m| \Rightarrow x=m. \quad \text{Значит точка пересечения}$$

имеет координаты $(m, -1)$.

Докажем теперь, что параболы разных типов имеют 2 общие точки (при различных значениях m и m_2). Значим уравнения парабол: $f_1(x) = a_1(x-m_1)^2 - 1$; $f_2(x) = a_2(x-m_2)^2 - 1$.

Найдем точки пересечения: $f_1(x) = f_2(x)$; $a_1(x-m_1)^2 - 1 = a_2(x-m_2)^2 - 1$

$$\Rightarrow x^2(a_1 - a_2) + x(2a_2m_2 - 2a_1m_1) + (a_1m_1^2 - a_2m_2^2) = 0$$

$$D = 4(a_2m_2 - a_1m_1)^2 - 4(a_1 - a_2)(a_1m_1^2 - a_2m_2^2) =$$

$$= 4(a_2^2m_2^2 + a_1^2m_1^2 - 2a_1a_2m_1m_2 - (a_1^2m_1^2 - a_1a_2m_1^2 - a_1a_2m_2^2 + a_2^2m_2^2)) =$$

$$= 4a_1a_2(m_1^2 + m_2^2 - 2m_1m_2) = 4a_1a_2(m_1 - m_2)^2. \quad \forall k. \quad m_1 \neq m_2, \text{ то}$$

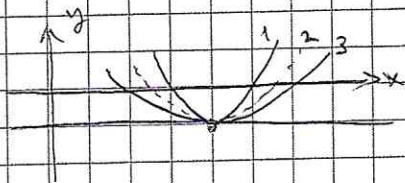
$$(m_1 - m_2)^2 > 0; \quad a_1 \text{ и } a_2 > 0. \quad \text{Значит } D > 0, \text{ а значит параболы}$$

имеют 2 точки пересечения, что и треб. д-во.

Как показано, что это параболы, следовательно условие

Всего различных типов парабол ~~100~~ 100. Прямых из одной

и той же форме можно провести только 50 различных парабол. не более



Это связано с тем, что значения a берутся с шагом 1, а значения $x = \sqrt{\frac{1}{a}}$ с шагом $\frac{1}{2}$, т.е. кол-во различных

существующих вершин $(m, -1)$ равно 50.

Т.к. всего получено 18900 чисел, то если бы случайно было получено число равное 38698, то кол-во чисел "удачей" (2 точки пересечения) было бы не менее $38698 - 18900 = 19798$, а кол-во "удачей" (1 точка пересечения) не более $18900 - 19798 = -898$. Такие "удачи" можно получить либо на пересечении парабол одного типа, либо на пересечении парабол разных типов при условии $m_1 \neq m_2$. Парабол одного типа не более 100, т.е. точек на пересечении парабол одного типа не менее 100 (т.к. всего различных парабол 100). Также точка на пересечении парабол разных типов (m_1, m_2) также не менее 100, а значит "удачей" не менее 200. Таким образом, число 38698 получить невозможно.

Ответ: Нет, не мог.

0 баллов