

Региональный этап ВсОШ
по математике 2021 год

1 день

Шифр: 1003

Таблица для жюри

1	2	3	4	5	Сумма
4 4	6	0	X	X	13
7	6	0	X	X	13
7	6 + 1/2	0			14

Задача 10.1) Решение: существует лишь несколько вариантов того, как могли палочки первой и второй групп (длинные или короткие) быть распределены между треугольниками (изначально сбалансированы). Эти варианты: 1) в первом Δ все палочки длинные, а во втором — короткие

Не создаю, что означает

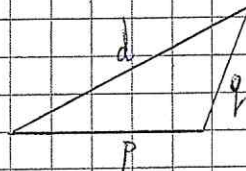
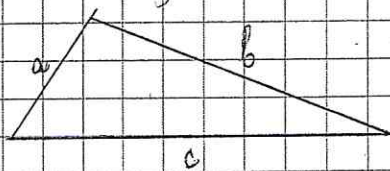
"Длинные" и "короткие" палочки

- 2) в первом Δ все длинные палочки и одна короткая, во втором Δ все короткие и длинная палочка.
3) в первом Δ одна длинная и все короткие палочки, а во втором Δ — все длинные и одна короткая.
4) в первом Δ три короткие палочки, а во втором — три длинные.

Сразу заметим, что рассматривать первый и четвертый варианты бессмысленно, потому что мы сразу имеем Δ из палочек первой группы и Δ из палочек второй.

Также отметим, что варианты 2) и 3) являются копией друг друга, если поменять порядок треугольников, поэтому нам достаточно рассмотреть второй (например) вариант и показать за исключением.

Назовем палочки, которые изначально были в первом Δ , a, b и c . Палочки второго Δ мы получим имена d, p и q . Допустим, что длинные палочки названы b, c и d , а короткие — a, p, q , соответственно.



$$\begin{cases} a \leq b+c \\ b \leq a+c \\ c \leq a+b \end{cases}; \begin{cases} d \leq p+q \\ p \leq d+q \\ q \leq d+p \end{cases}$$

Позднее мы меняем местами палочки a и d и смотрим, соблюдается ли неравенство Δ в каждом из Δ (в каждой из групп со сбалансированностью).
I. Из палочек первой группы (a, b, c) обязательно можно составить Δ , т.к. мы $d > a$ неравенства $b \leq a+c$ и $c \leq b+a$ точно будут верны, а $d \leq b+c$ очевидно выполняется, если вспомнить, что $d \leq p+q$, $p+q \leq a+c$ (т.к. b и c больше любой из p и q). Итак, Δ в первой группе обязательно можно составить.

II. Из палочек же второй группы Δ можно будет составить не всегда. Т.к. $a \leq d$, то одно из неравенств $p \leq d+q$ и $q \leq p+d$ может не выполняться, при достаточно маленьком a . Или перепроверим ситуацию: $a=1, b=7, c=7, d=7, p=5, q=3$. Видно, что $p \leq d+q$ можно так: $5 \leq 3+1=4$. Итак, Δ во второй группе нельзя составить при $a \leq |p-q|$, то есть составиться он не обязательно.

Верный принцип.

Третий вариант распределения палочек выглядит аналогично первому, рассмотрим только вплоть до перемены местами a и названий групп группировки переменными.

Задача

Ответ: да, из палочек первой группы обязательно можно составить треугольник, но из палочек второй — нет, не обязательно.

45

70

Задача 10.2

Неравенство!
так делать нельзя

Кемкого преобразуем первое неравенство, перенеся в правую часть слагаемое $(-y^4)$: $x^4 - y^4 > x \Leftrightarrow x^4 > y^4 + x$
Полученное в правой части выражение представим во втором неравенстве: $y^4 - x^4 > y \Leftrightarrow y^4 - y^4 - x^4 < y \Leftrightarrow -x^4 < y$ (*)
(Аналогично можем получить равносильное неравенство, если выразим y^4 из второго неравенства и подставим в первое: $y^4 - x^4 > y \Leftrightarrow y^4 > x^4 + y \Leftrightarrow x^4 - x^4 - y < x \Leftrightarrow -y < x$)

Теперь давайте предположим, что произведение xy действительно может быть отрицательным числом. Это значит, что переменные имеют разные знаки. Предположим, что x положителен, т.е. $x > 0$, а $y < 0$. Тогда по выведенному неравно неравенству (*) мы можем понять, что $|x| < |y|$, т.е. число, обратное x , больше отрицательного y . Это значит, что найдем противоречие, потому что $x^4 - y^4 < 0$ (из полож x^4 вычли полож. из-за четной степени и больше по модулю y^4), но должно быть $x^4 - y^4 > x > 0$. Отсюда предположение о том, что $x > 0$, а $y < 0$, неверно. Теперь попробуем, напротив, взять $y > 0$, а $x < 0$. Из неравенства (*) $|y| < |x|$, поэтому снова выходим на противоречие: $y^4 - x^4 < 0$, но должно быть $y^4 - x^4 > y > 0$. Значит, считать, что $y > 0$, а $x < 0$ мы тоже не можем.

Было показано, что x и y не могут иметь разные знаки, отсюда их произведение не может быть отрицательным числом.

Ответ: нет, произведение xy не может равняться отрицательному числу.

Задача 10.3

нет

Пусть a — один из элементов множества S , принадлежащий к натуральным числам. Так $a = \frac{b(3c-5)}{15}$, то a

обязательно кратно 15, т.е. кратно трём и пяти. Множителю $(3c-5)$ очевидно не кратно трём (число, делящееся на три, минус число, дающее остаток при делении на три), поэтому b точно кратно 3. Множитель $(3c-5)$ может быть кратно 5 при $c \equiv 5$, или же $b \equiv 15$ ($c \geq 2$). То есть

$$a = \frac{b(3c-5)}{15}$$

$$\begin{cases} a \equiv 15 \text{ при } (15 \text{ из } 15) \\ b \equiv 15 \\ c \geq 2 \\ b \equiv 3 \\ c \equiv 5 \end{cases}$$

Посмотрим теперь на число b и выполним, что оно тоже является элементом множества S , то есть условие для a выполнится и для него при других переменных.

$$b = \frac{p(3d-5)}{15}$$

$$\begin{cases} b \equiv 15 \text{ при } (15 \text{ из } 15) \\ p \equiv 15 \\ d \geq 2 \\ p \equiv 3 \\ d \equiv 5 \end{cases}$$

Далее мы аналогично можем рассмотреть число p , найти подходящие элементы, которые тоже можно рассмотреть все больше и больше, делая их и их делители.

Отсюда множество S бесконечно.

и эти числа могут собираться, будут все больше и больше при таком порядке.

Ос.

Региональный этап ВсОШ

по математике 2021 год

2 день

Шифр: 1003

Таблица для жюри

6	7	8	9	10	Сумма
7 _м	7 _м	1 _м	x	x	15
7	7	1	x	x	15

Задача № 10.6) Решение: начнём с того, что всего на доске может быть написано от 30 до 31 цифр, потому что числа a и b по условию десятизначные, однако про третье число $(a+b)$ нам ничего не сказано. Сумма двух чисел одинакового разряда может быть либо числом того же разряда, либо числом на один разряд старше. Итак, всего максимальное количество цифр на доске 31. Мы можем утверждать, что все эти цифры нечётными не могут, хотя бы потому, что тогда числа a и b нечётные (последняя цифра тоже нечётная), но и число $(a+b)$ нечётное (его последняя цифра нечётная, как и все цифры на доске). Такого быть не может, потому что сумма двух нечётных чисел всегда чётное число. Противоречие, так что количество нечётных цифр меньше 31. Следующее после 31 по величине натуральное число — 30, для него у нас уже есть пример составления чисел a , b и $(a+b)$. Это становится возможным, если (например) каждый сложением разрядов, начиная с единиц, получать в сумме число ≥ 10 . В следующий разряд мы сложим ещё дополнительную единицу, которая позволит нам сложить два нечётных числа с этой единицей и получить нечётное число (цифры в частности, т.е. в разряд мы запишем последнюю цифру суммы, которая и определяет чётность суммы). Не забудем и про старший разряд: в терции единица числа нечётное, поэтому сложив хорошо перейти в количестве 31 цифр на доске. В составленном мной примере единственная чётная цифра — это разряд единиц числа $(a+b)$, хотя это мог бы быть и разряд единиц одного из слагаемых.

Краткий алгоритм составления примера на 30 нечётных цифр:

число a : $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9 a_{10}$

число b : $b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6 b_7 b_8 b_9 b_{10}$

число $a+b$: $c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6 c_7 c_8 c_9 c_{10}$

где в каждом разряде $a_i + b_i$

≥ 10

(попишем только

последнюю цифру, так что вообще c_n считается только цифрой), $c_0 = 1$.

Пример для 30 нечётных цифр:

число a : 9539713759

число b : 9795399751

число $a+b$: 19335113510

Ответ: наибольшее количество нечётных цифр, которое могло быть выписано на доске — 30 (тридцать).

Задача № 10.7) Заметим, что по условию любые два числа отличаются на 3 кратное число. Но каждое число из ряда от 1 до 81 отличается на 3 только от двух или одного из чисел (1, 2, 3 не имеют числа в меньшую сторону, а 79, 80, 81 — в большую). Более того, из всех 81 числа на самом деле будет составлено 3 цепочки "цепочки", так как каждое число (за исключением переносимых ранее) будет связываться с соседней стороной с двумя другими числами: меньшее и большее его на 3, каждое из которых тоже связано с двумя числами (одним из которых всё же является наше изначальное число), при чём число меньшее изначального соединится с ещё меньшим (потому что с бывшим уже связано), а то с ещё меньшим, и так далее, пока не дойдёт до одного из чисел, меньше которого не найдётся. Аналогичным образом с большей стороны цепочка будет продолжаться до тех пор, пока не дойдёт до числа, больше которого на 3 не найдётся. Отсюда делаем вывод о том, что цепочки монотонны. На самом деле, каждая цепочка содержит все числа, дающие при делении на 3 определённый остаток (0, 1 или 2). Этот остаток определяется наименьшим числом цепочки (3, 2 или 1) и сохраняется далее при добавлении трёх. Так делаем вывод о существовании трёх "цепочек" по 27 чисел, которые лежат сами по себе, образуя некие "перепутанки" по таблице 9×9 , числа в цепочках имеют равные остатки при делении на 3 и изменяются с постоянным шагом.

На самом деле, здесь мы можем сделать первый из выводов: одна из цепочек (минимум одна) может занимать минимум две угловые клетки по таблице Дирихле. Имеем 3 цепочки, в состав которых входят все клетки таблицы (это "клетки") и из них 4 угловых клетки в таблице (это "крайние"). Из упомянутого принципа Дирихле принимаем, что на одну из цепочек (минимум) останутся минимум две угловые клетки. Благодаря этому всегда найдётся две угловые клетки, разность которых будет кратна 3 (пока не 6), а мы можем теперь отсюда расследовать одну цепочку, которой принадлежат две угловые клетки. Рассмотрим теперь эту одну цепочку. Соседние боковые стороны квадрата цепочки из которых как раз и оторваны разности на 3 между числами, будем для удобства называть "связями". Так вот, для того, чтобы условие о том, что разность чисел в угловых клетках $\neq 6$, не выполнялось, необходимо иметь между этими угловыми клетками нечётное количество связей (1: 3, но не кратно 2, $\neq 6$). Однако такого не будет. Назовём сторону между клетками (угловыми) вертикалью и промежуток между клетками в ней — связью. В вертикали 8, это чётное число, однако мы не знаем, как именно расположена цепочка, и её вполне могут быть "ответвления" от вертикали. Тем не менее, ответвления не меняют количества связей по модулю 2 (чётность сохраняется, это даже можно считать инвариантом).

(далее см. лист № 2)

$\Delta_{\text{AgCl}} \approx 10.7$

Общая численность и показателем этого является количество
раб. при введеном к ней с пометкой "Лична от ответственных".
На самом деле, численность вертикали не обязательно
без учета крестов могут быть находиться по горизонтали
друг от друга, но тогда между ними указывается в связи,
что тоже четкое число, а лична от ответственных работ
каждым считается.

Тогда как каждая связь — это ± 3 или ± 3 к первой угловой клетке, а количество связей равно $2n$ (чётно), то вторая угловая клетка будет отличаться от первой на $6n$ (разность кратна 6).

Лемма об ответственных

Лемма об ответвлениях

«Ответвления не влияют на количество связей по модулю 2»

Доказ: Каждая связь в ответвлении приводит кеттиску на 1 по горизонтали или вертикали. Если бы было возможным вернуться в ту же клетку, из которой началось ответвление, то его длина (в связях) была бы очевидно чётной, потому что для возвращения в точку придётся пройти влево столько же, сколько и вправо, а также столько же, сколько и вверх. Иначе говоря, в системе координат по каждой оси мы стартем из некоторой точки $(0;0)$ по горизонтали и вертикали в точку $(a;b)$ (на которой затем снова вернёмся в обратном направлении по каждому из измерений (например, только вправо и вверх), это значит, что мы сделаем a шагов по 1 вправо, а вернуться придётся никак иначе, чем a шагами влево, всего тогда по x горизонтали $2a$ шагов, аналогично в шагов вверх потребуются $2b$ шагов, всего шагов $2a + 2b = 2(a+b)$, что очевидно чётно. Разумеется, если мы хотим вернуться в точку отличную от начальной точки ответвления, то ответвление будет увеличено настолько, насколько удалена конечная клетка от начальной (в связях) (из $(0;0)$ в $(0;c)$ через $(a;b)$ шагов $2(a+b) + c$, а из $(0;0)$ в $(d;c)$ через $(a;b)$ шагов $2(a+b) + d + c$), а значит, и количество связей при $\#$ ответвлениях будет равно с обычным количеством связей в вертикали или диагонали по модулю 2 (добавление чётного чётности не меняет).

ОТВЕТ: да, верно

Задача 10.8

Дано:

$\triangle ABC$

$AB = BC$

$M \in AC, MA = MC$

AB, AC и BC — касательные

$DE \perp AC, A-C-D$

$K \in BC, B-C-K$

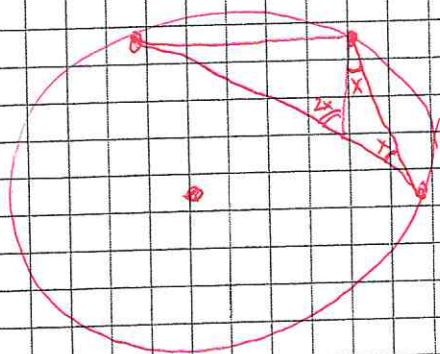
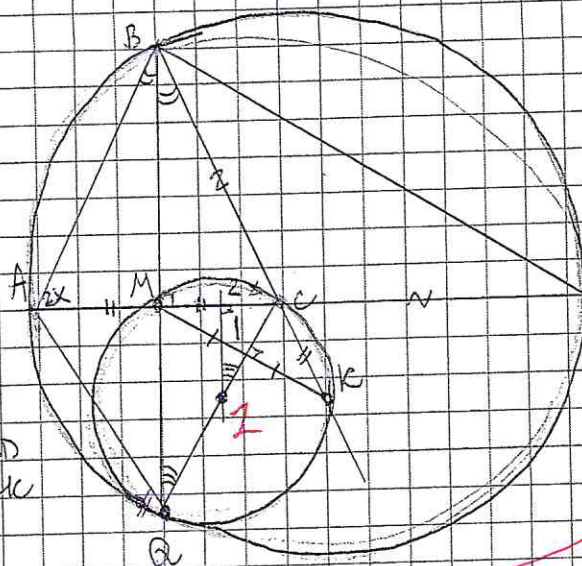
$BC = CD, CM = CK$

ω_1 — опис. для $\triangle ABD$

ω_2 — опис. для $\triangle MCK$

Доказать:

$\omega_1 \cap \omega_2 = 1$ точка



это не так

не показано

не доказано, что Q лежит на ω_2

Докажем: $\angle BAC = \angle BCA$
 В $\triangle ABC$, $\Rightarrow$ обозначим их $2x$. Имеем
 $\angle BCD = 180^\circ - 2x$, $\Rightarrow$
 $\angle CBD = \angle CDB$ (в $\triangle BCD$),
 из усл. $BC = CD$ $\Rightarrow$
 $\angle CDB = \frac{1}{2} \angle BCD$, но
 $\angle CDB$ — внешний, $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle BCA$ — центральный,
 C — центр окружности,
 $\triangle BAC$ — равнобедренный
 $(AC = BC = BD = \text{радиус})$.

$\triangle MCK$ — $\triangle$ по ул. $\Rightarrow$
 сер. пер. к MC проходит
 через C и пересекает
 в центре окружности сер.
 пер. к MC . Если провести
 AM до пересечения с ω_1 ,
 то получим точку Q .
 $(ABDQ)$ — впис. в ω_1 , но
 $Q \in CZ$ (Z — центр ω_2), т.к.
 $\triangle MCK$ — $\triangle$ по ул. $\Rightarrow$
 $\angle MCK = 90^\circ$, $\angle BMC = 90^\circ$,
 и сер. пер. $\perp MC$.
 CZ — радиус, $\Rightarrow Q \in$
 ω_2 .
 $Q \in CZ$, $Q \in \omega_1$, но
 Q также $\in \omega_2$. CQ — радиус
 ω_1 , но CQ — диаметр ω_2 ,
 т.к. CQ — радиус ω_1 ,
 радиус ω_2 — диаметр ω_1 ,
 центр ω_2 — центр ω_1 ,
 ω_1 и ω_2 касаются в Q .

Is