

Региональный этап ВсОШ

по математике 2021 год

2 день

Шифр: 911

Таблица для жюри

	1 ⁶	2 ⁷	3 ⁸	4 ⁹	5 ¹⁰	Сумма
^{9B}	7	7	X	1 ?	X	15
^{10B}	7	7	X	1	X	15
		+	X	3	X	

9. 6.

Предположим, что все 30 цифр - нечётные.

Тогда все цифры x чисел a и b - нечётные $\Rightarrow$

$\Rightarrow a$ и b - нечётные $\Rightarrow a + b = c$ - чётное, но

все цифры числа c - нечётные $\Rightarrow$ предположение не верно, нечётных цифр не более 29. +

Пример на 29 цифр:

$$a = 3333333333$$

$$b = 5777777777$$

$$c = 9111111111 \times 0$$

$$a + b = c$$

Ответ: 29.

75

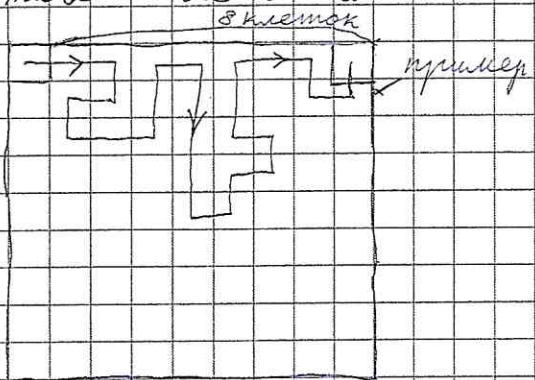
9. 7.

Если постоянно отнимать или прибавлять к числу n 3, то мы получим все числа таблицы с таким же остатком при делении на 3, как у n (т.к. при отнимании и прибавлении 3 остаток при делении на 3 не меняется).

Т.к. все пары чисел с разностью 3 стоят в соседних клетках, мы можем провести по клеткам ломаную, проходящую через все числа с одинаковым остатком при делении на 3 (и только через них).

Остатков при делении на 3 всего 3 $\Rightarrow$ 3 таких линии вместе проходят через все клетки, а условия

клеток 4 $\Rightarrow$ минимум 1 линия соединяет 2 угловые $\dagger$
 клетки $\Rightarrow$ т.к. разность чисел с одинаковым остатком
 при делении на 3 кратна $\times 3$, разность чисел в
 этих ~~клетках~~ 2 клетках кратна 3 ($a - b : 3$). $\dagger$



Чтобы соединить 2 верхние
~~клетки~~ угловые клетки, наименьшая
 длина пути

$$C_1 = 8 + 2k + 2p \text{ клеток}$$

Где 8 клеток — это минимальный
 путь, k — лишние клетки, пройденные вправо, и ещё
 k пройдены влево, чтобы в итоге линия продвинулась
 вправо ровно на 8; p — клетки, пройденные вниз, и
 p пройдены вверх, чтобы ~~по~~ ^{вернуться} остаться на
 той же строке таблицы. $\dagger$

$C_1 : 2$; аналогично с боковыми угловыми клетками
 Чтобы соединить противоположные
 угловые клетки, нужно ~~са~~ пройти на 8 клеток
 больше (вверх или вниз), чем при соединении боковых
 верхних угловых клеток; остальное не меняется $\Rightarrow$

$$C_2 = 8 + 2k + 2p + 8 : 2 \Rightarrow \dagger$$

$\Rightarrow$ Разность чисел ~~минимум~~ 2 угловых клеток
 всегда кратна 2 и 3 $\Rightarrow$ она всегда кратна 6.

Ответ: да

15

9.9.

Предположим, в хорошем слове может быть

$2n+1+N$ букв ($N \neq 0$) ($N > 0$):

Минимум 2 ^{буквы} ~~слова~~ использованы не менее 3 раз.

~~(т.к. если не более 1 слова использовано не менее 3 раз, то $2n+1$ букв не более $2n+1$)~~

(т.к. если все буквы использованы не более 2 раз; то букв не более $2n$, а их минимум $2n+2$ — на 2 больше).

Назовём эти буквы "а" и "б".

Уберём все буквы кроме а и б.

В получившаяся ряды а и б не могут стоять рядом, т.к. тогда рядом будут стоять аа и бб слово не будет хорошим (можно оставить аабб):

~~(... а а б б а ...)~~ $(\dots a \dots a \dots b \dots b \dots a \dots)$ $\neq$ $\left. \begin{array}{l} (\dots a \dots b \dots b \dots a \dots a \dots) \end{array} \right\} \text{ так}$

Быть не может $\Rightarrow$ все буквы чередуются $\Rightarrow$,
но при чередовании $(\dots a \dots b \dots a \dots b \dots a \dots b)$ можно
оставить последовательность аабб $\Rightarrow$ слово может
не быть хорошим (в обоих случаях от перестановки
а и б местами ничего не меняется) $\Rightarrow$
предположение не верно, букв в слове не более
 $2n+1$.

Пример на $2n+1$ букв:

Обозначим все буквы алфавита $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$.

Тогда хорошее слово можно составить так:

$+ \overbrace{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}^n \overbrace{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}^n a_1$ — начало и окончание

и буквы не идут после других одинаковых
букв $\Rightarrow$ последовательность вида $aa\bar{b}\bar{b}$ выделить
нельзя.

Региональный этап ВсОШ

по математике 2021 год

1 день

Шифр: 911

Таблица для жюри

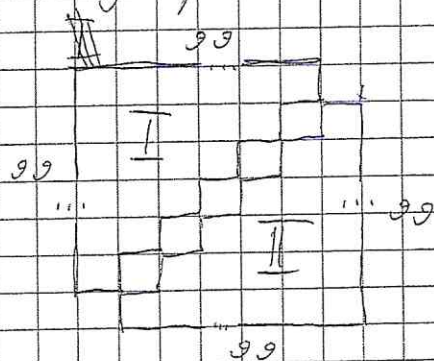
	1	2	3	4	5	Сумма
ВВ	7	7	0	X	7	21
ЮГ	7	7	0	X	7	21

9.5.

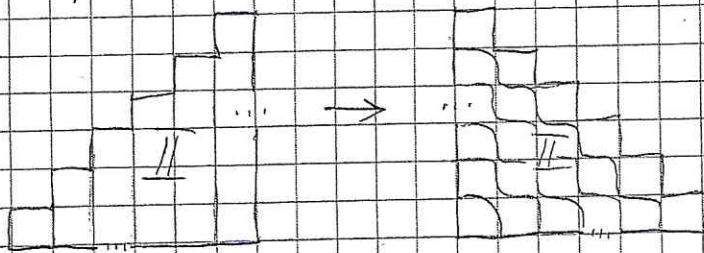
Побеждает Петя.

Стратегия для победы:

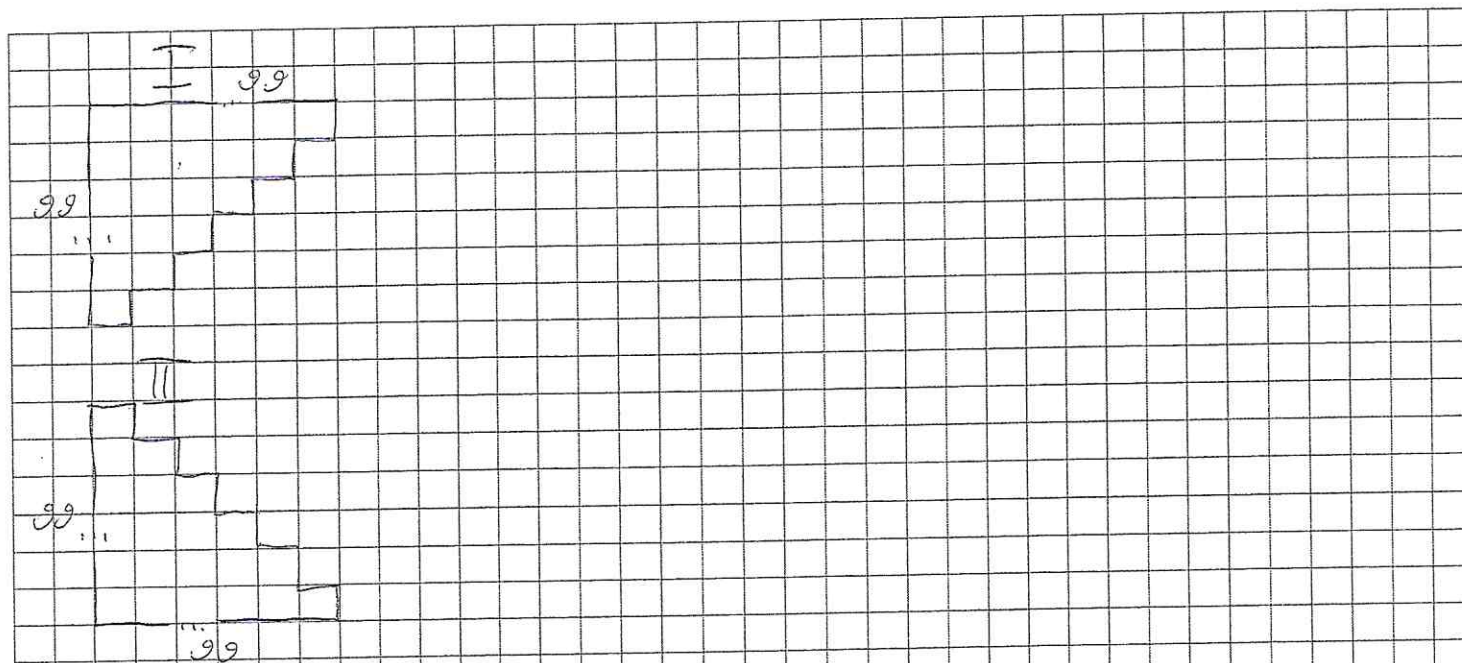
Сначала Петя закрашивает ~~на~~ первый ход все клетки на диагонали доски. $\Rightarrow$ доска разделилась на две равные незакрашенные части (т. I и т. II):



Если каждую ~~полюс~~ ^{строку} клеток II части сдвинуть в сторону (противоположную т. I) на ~~ко-во~~ ^{ко-во} клеток, равное порядковому номеру строки (~~указываемому т. I~~ ^{указываемому т. I}), то все её вертикальные полосы станут диагональными, а все диагональные — вертикальными:

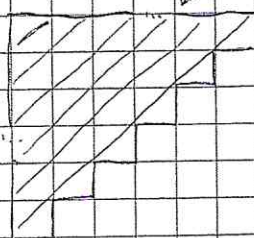


И нарисовать новую схему доски:

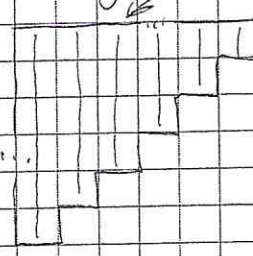


Как будут выглядеть ходы Пети и Васи на разных частях:

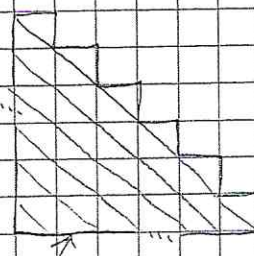
Ходы Пети на I:



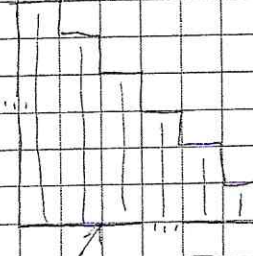
Ходы Васи на I:



Оси симметрии



Ходы Васи на II



Ходы Пети на II

Кривые линии показывают какие ~~какие~~ ходы игрок может закрашивать клетки.

Из симметрии После хода Пети ходит Вася.

Из симметрии следует, что Петя может зеркально ~~перенести~~ ^{перенести} ходы Васи на одной части на

другую. И. к. части одинаковые, ^{при такой} ~~последний~~ ход ~~сделает Гетя~~. стратегии последний ход ~~сделает Гетя~~.

~~И. к. 9. 2.~~

$$\begin{cases} x^2 - x > y^2 \\ y^2 - y > x^2 \end{cases}$$

$$y^2 - y - x > x^2 - x$$

$$x^2 - x > y^2$$

$$y^2 - y - x > y^2$$

$$-y - x > 0$$

$$-y > x$$

Предположим $x > 0$ ^и $y > 0$:

$-y > x$ - противоречие, предположение не верно.

Предположим $x = 0$ или $y = 0$ из условия: ненулевые

$$\begin{cases} 0^2 - 0 > y^2 \\ y^2 \geq 0 \end{cases} \text{ - противоречие.}$$

$$\begin{cases} 0^2 - 0 > x^2 \\ x^2 \geq 0 \end{cases} \text{ - противоречие.}$$

$\Rightarrow$ Предположение не верно.

$\Rightarrow$ ~~x и y имеют разные знаки.~~

Пример: Предположим

$$x > 0; y < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -y > x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |y| > |x| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2 > x^2; \text{ так как } x > 0$$

$$x^2 - x > y^2$$

$$x < 0; y > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x > y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |x| > |y| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 > y^2; \text{ так как } y > 0; \text{ так как } x < 0$$

$$y^2 - y > x^2$$

Предположение не верно $\Rightarrow$

$$\Rightarrow x < 0; y < 0; xy > 0$$

Пример: $y = -1; x = -1.$

$$(-1)^2 - (-1) > (-1)^2$$

$$(-1)^2 - (-1) > (-1)^2$$

$$xy = (-1) \cdot (-1)$$

$$xy = 1$$

~~xy~~ ~~не всегда~~ Произведение xy может быть только положительным.

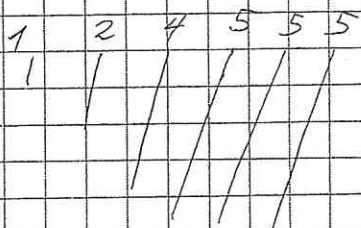
75/5

9.1

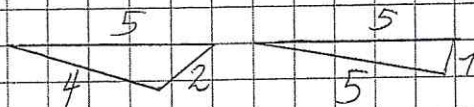
Нет, не обязательно.

Пример:

Палочки:



Первые треугольники:



75/5

Треугольник из желтых палочек составить нельзя, т.к. его стороны должны быть равны 1; 2; 4; но $1 + 2 < 4$.

9.2

$$ka + kb = ab + c^2$$

$$k < a; k < b$$

$$a^2 + ab > ab + c^2$$

$$ab + b^2 > ab + c^2$$

$$a^2 > c^2 \Rightarrow a > c$$

$$b^2 > c^2 \Rightarrow b > c$$

но а > b
05/5