

Региональный этап ВсОШ

по математике 2021 год

1 день

Шифр: 1004

Таблица для жюри

1	2	3	4	5	Сумма
75	75	0	X	X	14
70	70	0	x	x	

№10.2

$$x, y \neq 0$$

$$x^4 - y^4 > x$$

$$y^4 - x^4 > y$$

д) Предположим, что произведение xy может равняться отрицательному числу. Тогда один из множителей x или y положителен, другой отрицательный. Так как при замене местами x и y в системе неравенств ничего не изменится, то мы можем рассмотреть только один из двух вариантов: пусть $x > 0, y < 0$ (то есть при $x < 0, y > 0$ результат не изменится)

$$1) \begin{cases} x^4 - y^4 > x \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^4 - y^4 > 0 \\ x^4 > y^4 \end{cases}$$

$$|x| > |y|, \text{ так как } x > 0, \text{ то } |x| = x$$

$$x = |x| > |y|$$

$$x > |y|, \text{ так как } y < 0, \text{ то } |y| = -y$$

$$x > |y| = -y$$

$$x > -y$$

$$x + y > 0 \quad (1)$$

$$2) \begin{cases} x^4 - y^4 > x \\ y^4 - x^4 > y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^4 - y^4 - x > 0 \\ y^4 - x^4 - y > 0 \end{cases}$$

В обоих неравенствах обе части положительны, значит мы можем сложить эти два неравенства

$$\begin{cases} x^4 - y^4 - x > 0 \\ y^4 - x^4 - y > 0 \end{cases}$$

$$(x^4 - y^4 - x) + (y^4 - x^4 - y) > 0$$

$$\underline{x^4 - y^4 - x} + \underline{y^4 - x^4 - y} > 0$$

$$-x - y > 0$$

$$-(x + y) > 0$$

$$x + y < 0 \quad (2)$$

3) Посмотрим на (1) и (2):

$$(1) \quad x + y > 0$$

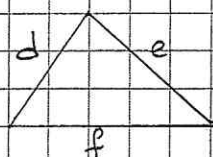
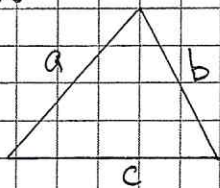
$$(2) \quad x + y < 0$$

Такое невозможно, следовательно мы получили противоречие, а значит произведение xy не может быть отрицательным.

Ответ: Нет, не может

№10.1

Пусть в прямоугольных треугольниках стороны отмечены следующим образом:



Наименования сторон и их длины никак не связаны

Заметим, что если при перегруппировке оказалось, что 3 наибольшие палочки были в одном треугольнике (а соответственно

и 3 наименьшие доли в одном треугольнике), то треугольники можно сгруппировать и их можно составить. (*)

Если первоначальные треугольники не были сразу с палочками одной группы, то при группировке в каждой из групп (наибольшие и наименьшие) будет по две палочки из одного первоначального треугольника (по принципу Дирихле: три стороны в треугольнике — три "овечки", две группы — две "коробки", в какой-то "коробке" окажутся хотя бы 2 "овечки", но случаи с тремя сторонами одного треугольника в одной группе уже рассмотрен в (*))

Пусть группы разбились как a, b, d — максимальные, c, e, f — минимальные (так как про треугольники ничего не известно, все случаи будут иметь одинаковое рассуждения, то если в максимальной группе не обязательно 2 стороны из первого треугольника, могут быть две стороны из второго, но тогда третья сторона будет из первого (т.к. (*)))

Вопрос 1. Треугольник из палочек первой (максимальной) группы

а) Предположим, что треугольник нельзя составить. Тогда возможны 3 случая этого: $(a+b \leq d)$, $(a+d \leq b)$ или $(b+d \leq a)$

1) $a+b < d$

a и b больше (или =) e и f (каждое т.е. $a \geq e$, $a \geq f$, $b \geq e$, $b \geq f$)

Тогда $a + b \geq e + f$, но $a + b < d$, то есть

$$d > a + b \geq e + f$$

$$d > e + f$$

Но d, e и f — стороны одного из первоначальных треугольников, то есть $d \leq e + f$. Противоречие.

$$2) \quad a + d \leq b \Rightarrow b > a + d$$

Но в первоначальном треугольнике $b \leq a + c$, тогда

$$a + d \leq b \leq a + c$$

$$a + d \leq a + c$$

$$d \leq c$$

d находится в максимальной группе, c в минимальной, но $d \leq c$, то невозможно. Противоречие.

$$3) \quad b + d < a \Rightarrow a > b + d$$

В первоначальном треугольнике $a \leq b + c$, тогда

$$b + d < a \leq b + c$$

$$b + d < b + c$$

$$d < c$$

Аналогично пункту б) получаем противоречие.

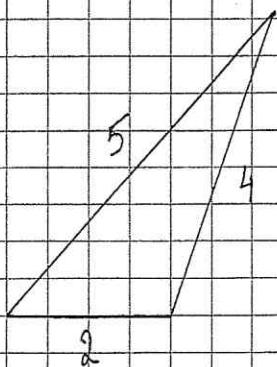
4) Мы получили противоречие во всех трех возможных случаях, следовательно предположение неверно, а значит треугольник из палочек первой группы обязательно можно составить.

Вопрос 2 Треугольник из палочек второй (минимальной) группы

Не обязательно получится составить треугольник

Приведем пример.

Первоначальные треугольники имеют стороны $(5; 4; 2)$ и $(5; 4; 2) \rightarrow 5+4 > 2; 4+2 > 5; 5+2 > 4$

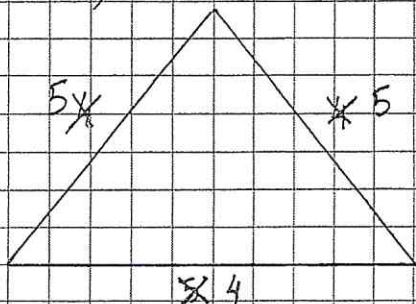


← два таких треугольника

Имеются стороны 5, 5, 4, 4, 2 и 2. При разделении на группы в первую (максимальную) попадут 5, 5 и 4; во вторую (минимальную) — 4, 2 и 2

Первая группа:

$$5+5 > 4; 5+4 > 5$$



Треугольник второй группы обратится в отрезок, так как $2+2 = 4$

Так как отрезок это не треугольник, то треугольника не существует, следовательно ответ "не обязательно"

Ответ: обязательно можно составить треугольник из палочек первой группы; не обязательно можно составить треугольник из палочек второй группы.

№10.3

Предположим, что множество S не бесконечно. Так как деление на ноль невозможно, все элементы не равны друг другу (если $a=b$, то $a = \frac{a(3c-5)}{15} \Rightarrow 15a = a(3c-5) \Rightarrow$ т.к. $a \neq 0$, $15 = 3c-5 \Rightarrow 3c = 10 \Rightarrow c$ — не натуральное, противоречие), но двадцать получится одно значение может, то множество станет конечно только если $b(3c-5)$ не будет делиться на 15 ни при каких b и c .

Заметим, что $3c-5 \equiv -5 \equiv 1 \pmod{3}$, то есть $3c-5$ никогда не делится на 3, а так как $15 = 3 \cdot 5$, то b должно делиться на 3 (для существования a).

Так как по предположению в какой-то момент не получится найти b и c для элемента a , то в множестве не найдется ни одного элемента вида $3k$ ($3c-5$ не делится на 3 следовательно не может делиться на 15, значит множитель 3 должен содержаться в элементе b).

Получается, что в множестве S все элементы (до элемента a на котором всё основано) имеют остатки 1 или 2 при делении на 3.

Посмотрим все варианты остатков $b_i(3c_i-5)$ на 3.

$$1) \quad b_i \equiv 1 \pmod{3}; \quad c_i \equiv 1 \pmod{3}$$

$b_i(3c_i-5) \equiv 1(3-5) \equiv -2 \equiv 1 \pmod{3}$, следовательно $b_i(3c_i-5)$ не делится на 3, а значит и на 15. Множество может быть только пустым.

$$2) \quad b_i \equiv_{\text{mod } 3} 1; \quad c_i \equiv_{\text{mod } 3} 2$$

$b_i(3c_i - 5) \equiv_{\text{mod } 3} 1(3 \cdot 2 - 5) \equiv_{\text{mod } 3} 1$, следовательно аналогично пункту 1 множество S пустое.

$$3) \quad b_i \equiv_{\text{mod } 3} 2; \quad c_i \equiv_{\text{mod } 3} 1$$

$b_i(3c_i - 5) \equiv_{\text{mod } 3} 2 \cdot (3 - 5) \equiv_{\text{mod } 3} 2 \cdot (-2) \equiv_{\text{mod } 3} -4 \equiv_{\text{mod } 3} 2$, следовательно аналогично пункту 1 множество S пустое.

$$4) \quad b_i \equiv_{\text{mod } 3} 2; \quad c_i \equiv_{\text{mod } 3} 2$$

$b_i(3c_i - 5) \equiv_{\text{mod } 3} 2 \cdot (6 - 5) \equiv_{\text{mod } 3} 2$, следовательно аналогично пункту 1 множество S пустое.

Так как по условию множество S не пустое, во всех 4 случаях мы получаем противоречие. Следовательно предположение неверно, следовательно множество бесконечно, что и требовалось доказать.



Ошибочно кажется,
что конечно S из-за
того, что $21 - 19$, который
не раскладывается,
но по условию все
раскладывается.

Региональный этап ВсОШ

по математике 2021 год

2 день

Шифр: 1004

Таблица для жюри

1 6	2 7	3 8	4 9	5 10	Сумма
7 Xede	7 Xede	7 Xede	X	X	21 Xede
7	7	7	X	X	21

10.6

1) Заметим, что на доске могло быть не больше 31 цифр:

2 десятизначных числа $\rightarrow 2 \cdot 10 = 20$ цифр

Сумма этих чисел может быть 10-значной (если не было переноса в новый разряд) или 11-значной (был добавлен разряд в начале).

Больше знаков получить невозможно (перенос добавляет только единицу, т.к. наибольшая сумма двух цифр $\boxed{18}$).

Так как количество нечетных цифр не может превышать количества всех цифр, $k_{\text{неч}} \leq 31$

2) Заметим, что в самом младшем разряде при сложении не может быть больше 2-х нечетных цифр:

Так как разряд последний, никакого переноса к нему не будет, следовательно, повлиять на четность результата сложения могут только сами слагаемые. Рассмотрим все случаи (только последний разряд чисел)

$$\begin{array}{r} \text{а)} \quad \dots\dots 4 \\ + \dots\dots 4 \\ \hline \dots\dots 4 \end{array}$$

0 нечетных

$$\begin{array}{r} \text{б)} \quad \dots\dots 1 \\ + \dots\dots 1 \\ \hline \dots\dots 2 \end{array}$$

2 нечетных

$$\begin{array}{r} \text{в)} \quad \dots\dots 4 \\ + \dots\dots 1 \\ \hline \dots\dots 5 \end{array}$$

2 нечетных

$$\begin{array}{r} \text{г)} \quad \dots\dots 1 \\ + \dots\dots 4 \\ \hline \dots\dots 5 \end{array}$$

2 нечетных

Это значит, что в последнем разряде не могут быть все нечетные цифры, следовательно, количество нечетных цифр во всем числе $k_{\text{неч}} \leq 30$

3) Приведем пример на максимальное $k_{\text{неч}} = 30$

Пример на 30 нечетных цифр на доске:

Число 1: 7777777777 (10 нечетных)

Число 2: 3333333333 (10 нечетных)

Сумма:

+	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0

11111111110 - 10 нечетных цифр

$$10 + 10 + 10 = 30$$

Ответ: 30 нечетных цифр

№10.7

1) "Разделим" все числа от 1 до 81 на 3 группы по 27 чисел. В каждой группе все числа будут давать одинаковые остатки при делении на 3:

Первая группа: 1, 4, 7, 10 ... 73, 76, 79 (ост. 1)

Вторая группа: 2, 5, 8, 11 ... 74, 77, 80 (ост. 2)

Третья группа: 3, 6, 9, 12 ... 75, 78, 81 (ост. 0)

Так как все числа в группах имеют одинаковые остатки от деления на 3, то они различаются между собой на $3m$, где m - натуральное. Тогда по условию задачи каждой число из какой-то группы стоит в клетке соседней по ребру с клеткой другого числа из этой группы (следующим или предыдущим в отсортированном по возрастанию ряду). Примем каждое число, кроме первого и последнего, имеет двух

— соседей из своего ряда.

2) Представим каждую из групп как "цепь", где каждый элемент больше предыдущего ровно на 3, первый элемент — 1, 2 или 3, последний — 79, 80 или 81 соответственно (то есть числа упорядочены по возрастанию).

Эта "цепь" неразрывна, так как элементы группы различаются на 3 должны быть в соседних клетках. "Цепь" может "ползти" только по вертикали и горизонтали (по диагонали движение невозможно).

3) Так как угловых клеток 4, а цепей 3, то в какой-то из цепей будет хотя бы 2 числа, находящиеся в угловых клетках.

Рассмотрим такую цепь и угловые клетки.

Рассмотрим 3 возможных взаиморасположения занятых угловых клеток (все остальные случаи можно получить поворотом таблицы):

a		a		b		a
---	--	---	--	---	--	---

b						b
---	--	--	--	--	--	---

Случай 1

Случай 2

Случай 3

Рассмотрим все случаи отдельно

Случай 1

Для того, чтобы прописать цену от клетки a до клетки b необходимо обязательно 8 раз "попрыгать" цены вертикально вниз (под "попрыгать" подразумевается, что мы ставим следующее в цену число в клетку соседнюю с текущей по стороне)

Цена не обязана идти только вертикально вниз, она может так и подниматься, так и "двигаться" вправо или влево. Но для достижения точки b сверху вертикально должен быть равен 8, горизонтальный сдвиг - отсутствующая. Это означает, что количество "попрыгов" цены вправо равно количеству "попрыгов" цены влево, то есть всего $2k$ горизонтальных движений. С вертикальными движениями количество прыжков должно быть на 8 меньше, чем количество спусков, то есть $m + (m - 8) = 2m - 8$ движений, где m - количество спусков.

В итоге будет совершенно $2k + 2m - 8 = 2(k + m - 4)$ действий, а то есть действий четное количество.

Заметим, что каждое действие увеличивает число, которое будет писаться дальше, на 3, значит разность между числом в клетке b и клетке a будет $3 \cdot 2(k + m - 4) = 6(k + m - 4)$, а значит делиться на 6 (две угловые клетки, разность чисел в которых делится на 6)

Случай 2

Ситуация аналогична случаю 1, только отсутствует не горизонтальный сдвиг, а вертикальный, а количество движений вправо на 8

Больше, чем количество движений влево. Количество ходов останется тем же (то есть представим как $2a$), каждый ход увеличивает разность с a на 3. Тогда разность между b и a равна $2a \cdot 3 = 6a$ снова делится на 6.

Случай 3.

В этом случае присутствует и горизонтальный и вертикальный сбег, при этом количество спусков на 8 больше количества подъёмов, количество движений вправо на 8 больше количества движений влево. Тогда будет $k + (k - 8) + m + (m - 8) = 2k + 2m - 16 = 2(k + m - 8)$ движений, где k и m количество спусков и движений вправо.

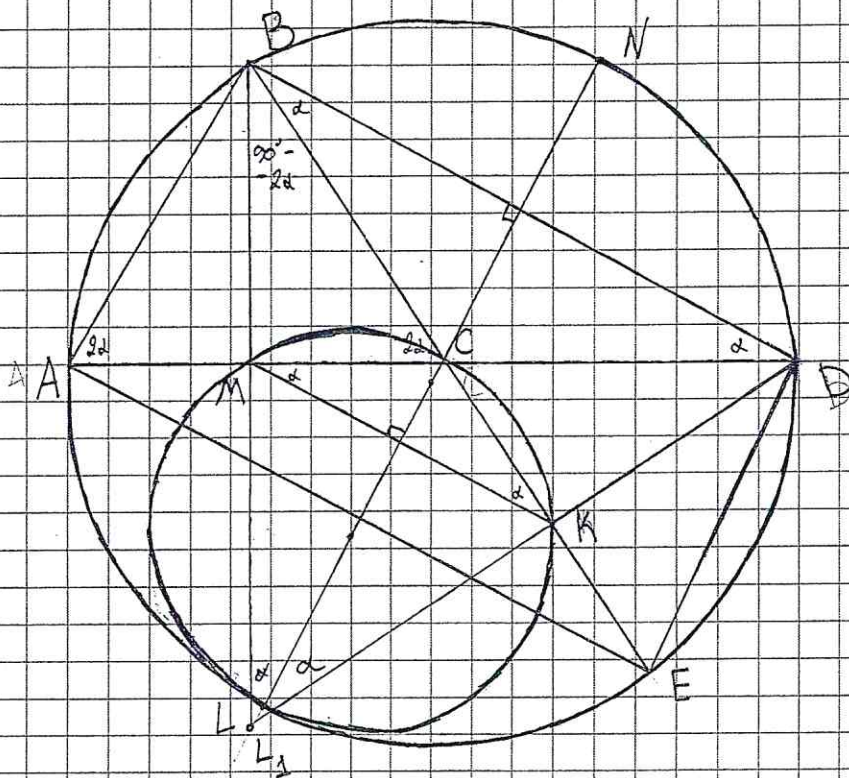
Каждый ход увеличивает разность с числом в клетке a на 3, тогда разность чисел в клетках b и a равна $3 \cdot 2(k + m - 8) = 6(k + m - 8) : 6$.

Во всех трёх рассмотренных случаях разность между клетками кратна 6, следовательно если у одной цепочки два числа в уровнях клетках, то они обязательно имеют разность кратную 6. А как было сказано ранее, такая цепь обязательно найдётся. Следовательно утверждение верно.

Ответ: да, верно

75

№10.8



Дано:

 $\triangle ABC$ - равнобедренный

AC - основание

 $AM = MC$ $BC = CD$ $CM = CK$

Окружность описанная
около $\triangle ABD$ -
- в доказательстве
"большая окружность"

Окружность описанная
около $\triangle MCK$ -
- в доказательстве
"маленькая/малая
окружность"

Док-во:

Большая и маленькая
окружности касаются

Док-во:

1) Посчитаем углы

 $\triangle ABC$ - равнобедренный $\Rightarrow \angle BAC = \angle BCA = 2\alpha$ $\angle BCD$ - смежный с $\angle BCA \Rightarrow \angle BCD = 180 - 2\alpha$ $\angle MCK$ и $\angle BCD$ - вертикальные $\Rightarrow \angle MCK = \angle BCD = 180 - 2\alpha$ $\triangle MCK$ - равнобедр. (так как $CM = CK$) $\Rightarrow \angle CMK = \angle CKM = \frac{180 - \angle MCK}{2} =$

$$= \frac{180 - (180 - 2\alpha)}{2} = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$$

$$\triangle BCD - \text{равнобедр. (так как } BC = CD) \Rightarrow \angle CBD = \angle CDB =$$

$$= \frac{180^\circ - \angle BCD}{2} = \frac{180^\circ - (180^\circ - 2\alpha)}{2} = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$$

2) $\angle BDM = \angle DMK = \alpha$, следовательно $BD \parallel MK$ при секущей MD

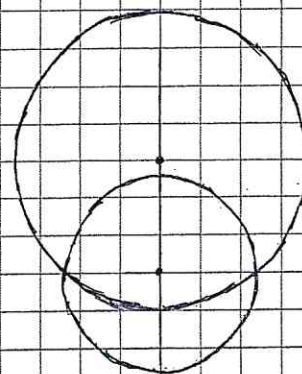
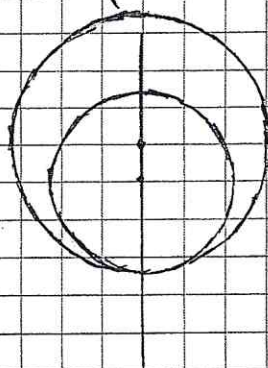
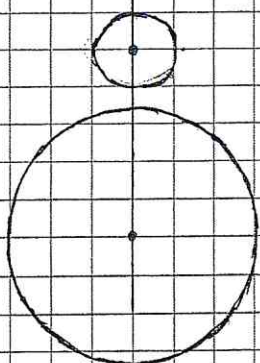
3) Проведем $CN \perp BD$ (высота треугольника CBD). Так как $BD \parallel MK$, то продолжение CN будет перпендикулярно MK (высота треугольника $МКН$)

Заметим, что так как треугольники $СМК$ и $СВD$ - равнобедр., а MK и BD - основания, то прямая CN не только высота, но и медиана, и биссектриса, а значит и серединный перпендикуляр к сторонам MK и BD

4) Так как CN - сер. пер. к BD , то центр описанной окружности $\triangle ABD$ лежит на этой прямой.

Аналогично получаем, что центр описанной окружности $\triangle МКН$ лежит на прямой CN

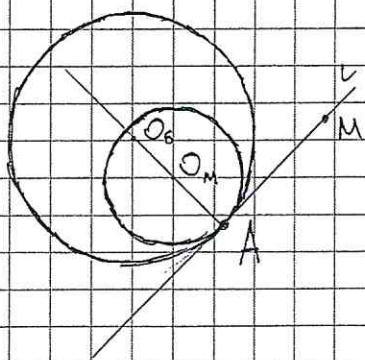
5) Если центры двух окружностей лежат на одной прямой, возможны следующие варианты:



В первом случае общие точки отсутствуют.

Во втором случае (нужном нам) одна общая точка и она лежит на той же прямой, что и центры окружностей.

Предположим что это не так и точка пересечения находится не на общей прямой.



Пусть точка A — точка касания окружностей. Проведем через неё общую касательную к окружностям.

Так как угол между радиусом и касательной равен 90° , то если провести перпендикуляр к прямой из точки A ,

то он должен пройти через ~~оба центра окружностей~~, ~~то есть центра окружностей~~ ~~окажется~~ на центр маленькой окружности, значит O_1 и A лежат на одной прямой, но так как по предположению O_1 , O_2 и A не лежат на одной прямой, то точка O_2 не должна лежать на прямой AO_1 , являющейся перпендикуляром к прямой L . Это противоречит тому, что O_2 — центр большой окружности, так как тогда $\angle O_2 A M = 90^\circ \rightarrow O_2 A$ — перпендикуляр. Противоречие.

Значит если две окружности касаются и имеют общую прямую, содержащую их центры, то точка пересечения этих окружностей будет лежать на этой прямой.

Аналогично и в обратную сторону: если две окружности имеют общую прямую, содержащую их центры,

то ~~линией~~ есть точка принадлежащая обоим окружностям,
то эти точки касаются (1)

Случай три содержит две разные точки. Эти точки
не могут находиться на одной прямой (из-за утверждения 1))

б) Продлим BM и DK до пересечения в точке L_1

Так как BM - медиана в равнобедренном $\triangle ABC$, то BM -
- высота и биссектриса. Тогда $\angle MBC = \frac{1}{2} \angle ABC = \frac{1}{2} (180^\circ - 2\angle BAC) =$
 $= \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - 4\alpha) = 90^\circ - 2\alpha$

$$BC = CD$$

$$MC = CK$$

$$\angle BCM = \angle DCK - \text{вертикальные}$$

$$\left. \begin{array}{l} BC = CD \\ MC = CK \\ \angle BCM = \angle DCK \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle BCM = \triangle DCK \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle MBC = \angle KDC = 90^\circ - 2\alpha$$

$$\text{В } \triangle BL_1D \quad \angle BL_1D = 180^\circ - \angle L_1BD - \angle L_1DB = 180^\circ - 90^\circ + 2\alpha - 90^\circ + 2\alpha =$$

$$= 2\alpha + 2\alpha - 2\alpha = 2\alpha$$

$$\triangle BAD - \text{вписанный} \Rightarrow \angle BND = 2\angle BAD = 2 \cdot 2\alpha = 4\alpha$$

$\angle BL_1D = 2\alpha = \frac{1}{2} \angle BND$, следовательно $\angle BL_1D$ - вписанный,
значит точка L_1 совпадает с точкой L - пересечением BN
и большой окружности.

г) Заметим, что так как $\angle LBD = \angle LDB = 90^\circ - 2\alpha + \alpha = 90^\circ - \alpha$,
то $\triangle LBD$ - равнобедренный, следовательно LN - не только
высота, но и биссектриса, следовательно $\angle BLN = \angle NLD =$
 $= \alpha$

8) $\angle KMC$ - вписанный $\Rightarrow \angle \cup CK$ (маленькая) $= 2 \cdot \angle KMC = 2\alpha$
 $\angle KLC = \alpha = \frac{1}{2} \cup CK$, следовательно $\angle KLC$ - вписанный,
 следовательно точка L принадлежит маленькой окружности,
 значит у окружностей точно есть хотя бы 1 общая
 точка.

Но при этом эта точка L является точкой пересечения
 окружностей и прямой CN , которая содержит в себе центры
 окружностей, что по утверждению (1) приводит к тому,
 что эти две окружности имеют ровно одну общую
 точку, то есть касаются, что и требовалось
 доказать

70