

Региональный этап ВсОШ

по математике 2021 год

1 день

Шифр: 1107

Таблица для жюри

1	2	3	4	5	Сумма
7 6 MB	7 MB	2 MB	0 MB	X	16 MB
7	7	2	0	x	16 yet

11) $1000000 = 10^6$ Назовем число подходящим, если остаток от деления этого числа на 625 равен остатку от деления этого числа на 40. $10^6 : 625 = 2^4 \cdot 5^4 : 5^4 = 2^4 \cdot 5^2$ - остаток равен нулю. Следующее после 10^6 число, делящееся на 625 и 40 без остатка - $1000000 + 1000(625, 40) = 1005000$, то есть каждое 5000-е число делится на 625 и 40 без остатка. Так остаток подходящих чисел меньше делителя (40) но $40 \leq 1000$, то ряд подходящих чисел идет чередуются через каждые 5000 чисел, то есть в разряде тысяч может стоять цифра 0 или 5. Ответ: 0 или 5.

12)
$$\begin{cases} x^2 - y^2 > x \\ y^2 - x^2 > y \end{cases} \quad x \neq 0, y \neq 0 \quad \text{При } x=y, x \neq 0 \quad x < 0$$

$$\begin{cases} 0 > x \\ 0 > y \end{cases} \quad \text{Верно, в таком случае } xy > 0 \text{ - положительный знак.}$$

Пример: $x=-1, y=-1$
$$\begin{cases} 1-1 > -1 \\ 1-1 > -1 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 > -1 \\ 0 > -1 \end{cases} \quad \text{Верно: } (-1) \cdot (-1) = 1$$

Допустим, что $xy < 0$. Без ограничений общности будем считать, что $x > y$ (при $x=y$ $x \geq 0$, то есть $x \neq y$), тогда $x > 0, y < 0$.

Из первого неравенства $x^2 - y^2 > x$ п.к. $x > y, x^2 > 0, y^2 > 0$, но $x > 0$, то $x^2 - y^2 > 0, x^2 > y^2 \Rightarrow |x| > |y|$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 > x \\ y^2 - x^2 > y \end{cases}$$

$x+y < 0 \Rightarrow x < -y$ но т.к. $x > 0$, то $|x| < |y|$ - противоречие, следовательно, $xy > 0$.

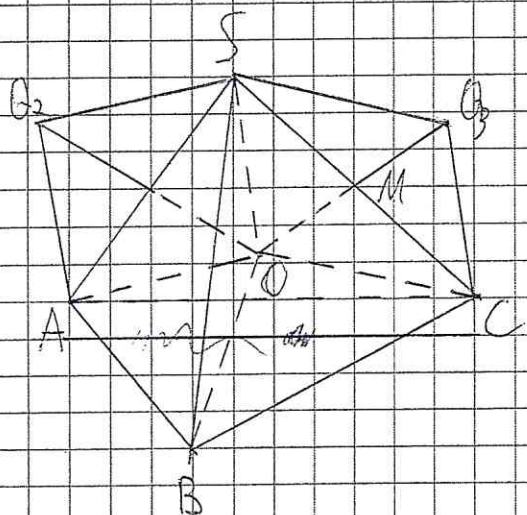
13. Если парабола может иметь только 2 общие точки с другой параболой, т.к. 3 точки определяют параболу. Тогда, максимум возможное число общих точек равно $19900 \cdot 2 = 39800$, но это число написано без учета других условий. Пусть характеристика K - расстояние между точками пересечения парабол с Ox . Тогда, т.к. по условию вершины всех парабол лежат на прямой $y = -1$, то если у двух функций $f_1(x) = ax^2 + bx + c$, и $f_2(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$, $K_1 = K_2$, то $a_1 = a_2$, в этом случае точки пересечения можно найти, решая уравнение $ax^2 + bx + c = a_2x^2 + b_2x + c_2$, т.е. $b_1x + c_1 = b_2x + c_2$ - оно имеет либо 1 корень, либо множество (при $b_1 = b_2$ и $c_1 = c_2$), либо 0 корней (при $b_1 = b_2$ и $c_1 \neq c_2$), но т.к. функции различны и имеют вершины на одной прямой, то при $K_1 = K_2$ параболы ~~или~~ графики этих функций пересекаются в 1 точке. И.к. всего 100 точек, то рассматривать можно при-
 нимать значения от 1 до 100, но всего 200 функций, значит, ~~100 графиков имеют каждый~~ из 100 функций имеет один и тот же старший коэффициент a , так как и у какой-то другой функции, то есть из полученного числа ранее 1 числа 39800 мы должны вычесть 100 точек $\Rightarrow 39700$. Однако, если K функций различны, но вершина одна, то они так же имеют только 1 общую точку. Всего 100 точек $\Rightarrow 100 \cdot 2 - 3 \Rightarrow 197$ вершин (как минимум). Но графиков 200 $\Rightarrow 3$ функции имеют общую вершину. Это не могут быть графики с одинаковым K , т.к. тогда они будут совпадать, значит, вычитаем из числа еще 3 $\Rightarrow 39697$. И.к. $39697 < 39699$, то Олен не мог получить 39699. Ответ не мог

Есть две вершины 199 — неверно

тогда $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots, 99, 99\frac{1}{2}$

Не доказано, что в др. случаях всегда 2 т. перес.

25



Дано $SABC$ -пирамида, O - центр описанной сферы, $\Omega, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ - сферы, симметричны относительно SA, SB и SC .

Доказать: $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ имеют общую точку.

Не рассматривая сферу γ_2 симметричную относительно плоскости ABC .

Доказательство

Рассм. Ω и γ_3 . Пусть центр γ_3 - точка Q_3 . Так как O или Q_3 оток SC , то $SC \cap OQ_3 = M$, $OM \perp SC$, $Q_3M \perp SC$, так $OQ_3 \perp SC$, то $OQ_3 \cap SC = M$, то $\{S, Q_3, C, O\}$ лежат на одной плоскости. Так как O - центр опис. сферы около $SABC$, то $SO = AO = BO = CO$. Также SOQ_3 , $SC = OC \Rightarrow \triangle SOQ_3$, $OQ_3 \perp SC \Rightarrow \triangle SOQ_3$ - равноб. $\Rightarrow Q_3S = SO = R$, где R - радиус сферы Ω , но $\gamma_3 = \Omega \Rightarrow S$ лежит на сфере γ_3 . Продолжая аналогичные рассуждения для других сфер, получаем, что S лежит на сферах γ_1 и γ_2 , т.е. S - общая точка сфер $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. ч.т.д.

Региональный этап ВсОШ

по математике 2021 год

2 день

Шифр: 1107

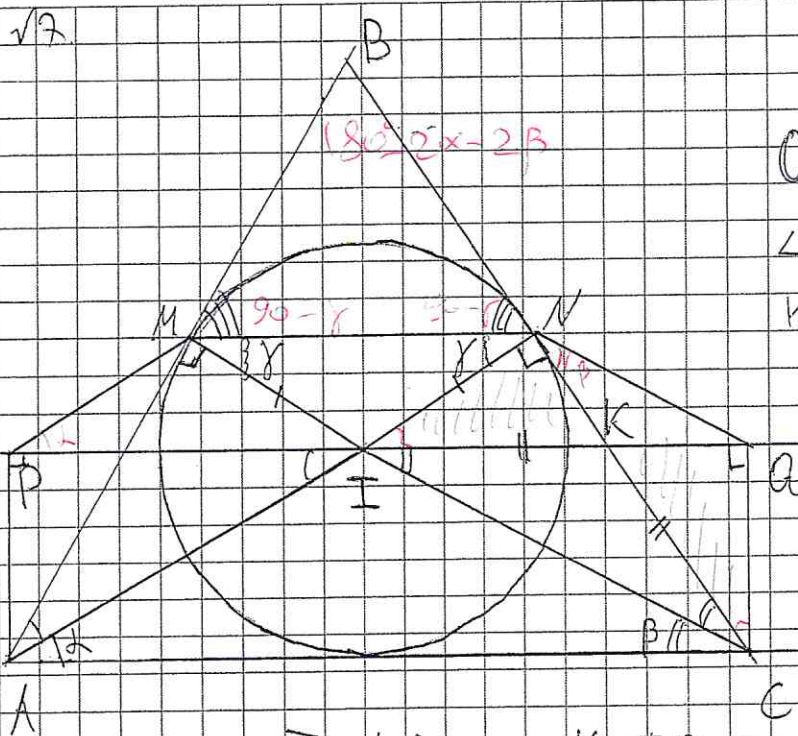
Таблица для жюри

1 6	2 7	3 8	4 9	5 10	Сумма
7	6	1	X	X	14
7 кв	6 кв	1 кв	X	X	14

505
14

№6.

Разделим записанные числа на 3 группы: 1) 1, 4, 7, ..., 79; 2) 2, 5, 8, ..., 90; 3) 3, 6, 9, ..., 99. Их можно ввести в общую форму $a_n = 3n + k$ где k - номер группы. И.к. всего углов 9, а групп только 3, то как минимум 2 из угловых клеток будут заняты числами одной группы. Разность чисел a_{n_1} и a_{n_2} одной группы равна $3n_1 + k - 3n_2 + k = 3(n_1 - n_2)$. Эта разность делится на 3, т.е. $3 \mid 3$. Заметим, что делимость на 6 означает делимость на 3 и 2. Докажем, что $n_1 - n_2$ делится на 2. И.к. числа, отличающиеся на 3, стоят в соседстве друг с другом, то получается 3 цепочки таких чисел (3 группы). И.к. расстояние между двумя соседними угловыми клетками равно 6 и ~~и~~, для противоположных оно равно 16 (вычисляется по формуле $r = (x_1 - x_2) + (y_2 - y_1)$), то, если, а эти числа четные, то четность чисел n_1 и n_2 , занимающих эти клетки, одинакова. В самом деле, даже если и при расстановке чисел "пойти" по модальному направлению, тем самым изменив четность следующего числа, то расстояние до угловой клетки так же изменится на 1, что ~~и~~ И.к. Таким образом, $(n_1 - n_2)$ - делится на 2 $\Rightarrow 3(n_1 - n_2) \div 6$. Ответ верно. 



Доказательство

Обозначим $\angle IAC = \alpha$, $\angle ICA = \beta$, $\angle BIN = \gamma$. Так I - центр вписанной окр., то AI и CI - биссектрисы $\Rightarrow \angle ICA = \angle ACI = \beta$, так $PA \parallel AC$, то $\angle ACI = \angle CIG$ (каждый из углов при секущей IC) $\Rightarrow \angle GIC = \angle GCI \Rightarrow IG = IC$ (равност.

треугольн.) $\Rightarrow IK = KC$, где $K = IA \cap MC$. Так как $\triangle IKM$ и $\triangle GCK$ $\angle IMK = 90^\circ$ (так BC - касательная к окр. AP), $\angle GCK = 90^\circ \Rightarrow \angle IMK = \angle GCK$; $\angle IKM = \angle CKG$ - вертикальные $\Rightarrow \triangle IMK = \triangle GCK$ по двум углам и острым углом $\Rightarrow \angle MKI = \angle GCK \Rightarrow \angle MCI = \angle GCI \Rightarrow IMGC$ - равнобедренная трапеция $\Rightarrow \angle MCI = \angle GCI = \beta$ (каждый из углов при сек. IC). Так как $PMNG$ - вписанная, то $\angle MPG + \angle MNG = 180^\circ \Rightarrow 2\alpha + \gamma + 90^\circ + \beta = 180^\circ \Rightarrow 2\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$ ($\angle MPI = 2\alpha$, $\angle MNI = \gamma$: доказывается аналогично $\triangle AI$, $APMI$ - трапеция $\Rightarrow \angle MPI = \angle AIP$ по окр. AI). Из $\triangle ABC$: $\angle A + \angle C = 180^\circ - \angle B$, $2\alpha + 2\beta = 180^\circ - \angle B$, $\angle B = 180^\circ - 2\alpha - 2\beta$. Из $\triangle BMN$: $\angle B = 180^\circ - \angle BMN - \angle BNM$. Так IM и IN - радиусы, то $\triangle MIN$ - равнобедренный, $\angle IMN = \angle INM = \gamma$, $\angle BMN = \angle BNM = 90^\circ - \gamma \Rightarrow 180^\circ = 2\gamma + 2(90^\circ - \gamma) \Rightarrow 180^\circ = 2\gamma + 180^\circ - 2\gamma \Rightarrow 180^\circ = 180^\circ$. $\Rightarrow 2\alpha + \beta = 90^\circ - \gamma$, $2\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ \Rightarrow PMNG$ - вписанная $\Rightarrow P, M, N, G$ лежат на одной окружности. $\square$

Менее очевиднее

2) Покажем, что при $k \geq 2n+2$ характер слов не минимальное П.Р., при $2n+2$ букв РДП