

Региональный этап ВсОШ
по математике 2021 год

1 день

Шифр: 904

Таблица для жюри

	1	2	3	4	5	Сумма
ВВ	7	7	0	X	X	14
ЮТ	7	7	0	X	X	14

По неравенству ^{и т} треугольника:

Треугольник существует тогда и только тогда, когда длина любой из его сторон не превосходит и не равна сумме длин двух других его сторон. Предположим, что у $U_0 - U_1$ были палочки длиной в 12; 10; 3; 6; 3; 2. Тогда, изначально от U_0 можно составить треугольники сторонами 12; 10; 3 (потому что $12 + 10 > 3$; $10 + 3 > 12$; $12 + 3 > 10$), и со сторонами 7; 6; 2 (потому что $7 + 6 > 2$; $6 + 2 > 7$; $7 + 2 > 6$). Но после того, как от U_0 мы перестали вычитать, из трёх оставшихся палочек он треугольник составить (12 + 10 > 3; 12 + 3 > 10; 10 + 3 > 12), а из трёх остальных — нет (3 + 3 < 6). Значит, длину 6 обязательно нужно использовать в составе треугольника.

Ответ: нет.

75

(12)

Рассмотрим случай, когда $x = y = -5$.Тогда $(-5)^2 - (-5) = 30$, а $30 > 25$; значит $x^2 - x > y^2$ и $y^2 - y > x^2$. Тогда $x \cdot y = 25$ и $x, y > 0$ (невозможно). Докажем, что x, y не может быть отрицательными. Числа x, y либо отрицательны, либо обалибо $x < 0$ и $y > 0$; либо $x > 0$ и $y < 0$. Не нарушаяобщности, предположим, что $x < 0$ и $y > 0$.

Рассмотрим 2 случая:

I $|x| = |y|$,Тогда $y^2 - y > x^2$, но так как $y^2 = |y|^2$; $x^2 = |x|^2$ и $|x| = |y|$, но $x^2 - y > x^2 \Rightarrow -y > 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow y < 0$. Противоречие, т.к. мы предположили, что $y > 0$.II $|x| < |y|$;Тогда $y > -x$, т.к. $y > 0$ и $x < 0$. Если $y^2 - y > x^2$ и $x^2 - x > y^2$, то $y^2 + x^2 - y - x > x^2 + y^2$

(можно получить, сложив неравенства) и вычтем

частей вычтем $y^2 + x^2$, но получим, что $-y - x > 0 \Rightarrow -x > y$ - Противоречие.

71

№2 (продолжение)

III

$$|x| > |y|,$$

Тогда, если $y^2 - y > x^2$, то $x \neq y > 0$, то

$$\cancel{x^2} \Rightarrow -y \quad 0 > -y, \text{ значит } y^2 > y^2 - y, \text{ и}$$

$$y^2 > y^2 - y > x^2 \Rightarrow y^2 > x^2, \text{ но } |y| > |x|,$$

и $|y| > |x|$ — противоречие.

Значит, раз мы все 3 раза получили противоречия, то $\begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \end{cases}$ не может.

Аналогично при $y < 0$, то $\begin{cases} x^2 - x > y^2 \\ y^2 - y > x^2 \end{cases}$

и значит, и $\begin{cases} y < 0 \\ x > 0 \end{cases}$ верными быть не может.

и т.к. $x \neq 0$ и $y \neq 0$ по условию, то $xy > 0$.

Ответ: только положительный знак (+).

№3

Ответ: 5.

Пример: Пусть $a = 2 \pm 2$, а $c = 4$. Тогда

$$k = \frac{2 \cdot 2 + 4^2}{76} = \frac{16 + 16}{76} = \frac{32}{76} = \frac{8}{19}, \text{ а } 548 \cdot \frac{8}{19} \text{ делится на } 5$$

делителей: 1; 2; 4; 8; 16.

Оценка: для начала докажем, что $a+b$ — не простое. Пусть $a+b \in p$. Тогда $b = p-a$.

$$\text{Тогда } \frac{a \cdot (p-a) + c^2}{p} = k; \quad \frac{a \cdot (p-a) + c^2}{p} = \frac{pa - a^2 + c^2}{p} =$$

$$= \frac{a}{p} - \frac{a^2 - c^2}{p}. \quad \text{Тогда } 0 \neq \frac{a^2 - c^2}{p}; \text{ получим}$$

что $a > a - \frac{a^2 - c^2}{p}$ по последнему делителю, $(a^2 - c^2) \div p$. Рассмотрим два случая:

I $a = c+1$. Тогда $((c+1)^2 - c^2) \div p$;

$$c^2 + 2c + 1 - c^2 = (2c+1) \div p; \text{ значит, } a+c \div p, \text{ к}$$

$a+c \geq p$, и т.к. $p = a+b$, следовательно $c \geq b$.

Таким образом не доказываем 05

Региональный этап ВсОШ

по математике 2021 год

2 день

Шифр: 904

Таблица для жюри

	1 6	2 7	3 8	4 9	5 10	Сумма
13	7	7	X	2	X	16
14	7	7	X	2	X	16
15	7		X	2	X	

Чётными могут оказаться не более 20 цифр

Пример на 19:

$$\begin{array}{r} + 3555555556 \\ 355555555 \\ \hline 711111111 \end{array} \quad +$$

Отсюда:

Требуем, чтобы все 30 цифр нечётны. Тогда, по признаку делимости на 2 (число делится на 2 тогда и только тогда, когда его последняя цифра чётна) $a \equiv 1 \pmod{2}$; $b \equiv 1 \pmod{2}$; $c \equiv 1 \pmod{2}$. Тогда $a + b \equiv 1 + 1 \equiv 0 \pmod{2}$, а по условию, $a + b = c$, значит $c \equiv 0 \pmod{2}$ — противоречие. Значит, нечётными могут оказаться не более 20 цифр, ч.т.д.

Ответ: 20.

Пронумеруем все клетки поля так, что верхняя левая клетка имеет индекс $(0; 0)$, а m -ная клетка (читая слева направо) n -ной строки (читая сверху вниз) имеет индекс $(n-1; m-1)$. Цепочка из m и n всех минимальных остатков от деления на 3. По условию, из-за того, что каждый

и 2 (продолжение)

с числом n в соседней по стороне клетки) на соседняя число, меньшее этого числа $n-3$ (кроме случаев $n=7$; 2 или 3), и число, большее этого числа $n+3$ (кроме чисел 79 , 80 , 81 , то получится 3

узелочки: 1-ая с числами $1, 4, 7, \dots, 79$; 2-ая с

числами $2, 5, 8, \dots, 80$; 3-я с числами $3, 6, 9, \dots, 81$.

и каждая будет содержать 27 чисел. Тогда,

т.к. заданных клеток всего 4, а узелочков - 3,

по принципу Дирихле, хотя бы в одной

узелочке будут 2 условные клетки. ^{т.е. к.}

если на соседней в одной узелочке, то (числа в этих клетках) они дают сумму и раз так же обраток при

+ делении на 3, и их разность будет кратна

3. Перевернем доску так, чтобы ^(клетка с меньшим числом) эти две

клетки имели индекс $(0; 0)$. Предположим,

что вторая имеет индекс $(0; 8)$. (или $(8; 0)$ для

нас рассуждения идентичны). Тогда, рассмотрим

сколько раз в поперечном сечении заданных из

клетки $(0; 0)$ и клетки $(0; 8)$. Нам понадобится

перемещение из клетки с числом n в соседнюю ей

клетку с числом $n+3$. Заметим, что сколько бы

раз мы ни делали этого, мы столько же раз мысленно

идем, и вертикальный шаг будет только один раз

каждый, обозначим его за 2 п. Также заметим,

и $\frac{1}{2}$ предложения. Часть 2)

Что т.к. в игре мы перемещались по клеткам
вправо, маров вправо было ровно m раз больше,
чем маров влево. Пусть влево мы маров
 n раз, тогда вправо маров $n+p$ раз.
Тогда всего маров во все направления было
 $2n + m + (n+p) = 2n + 2m + p = 2(n+m+p)$, а значит член
к нашему числу в клетке $(0; 0)$ представлял
ровно $2(n+m+p)$ раз, и его четность не измени-
лась. Значит, раз числа в клетках $(0; 0)$ и $(0; p)$
раз дадут один и тот же остаток при делении
на 2, то и n разность кратна и 2 и 3, а
значит кратна 6.

Рассмотрим случай, когда впервые число в цепочке
оказалось в клетке $(p; p)$. Тогда приходя
аналогично предыдущему доказательству,
мы сделаем m маров вправо, или вверх и n маров
влево, или влево, и всего сделаем
 $n + (n+p) + m + (m+p) = 2(n+m+p)$ маров, и это число тоже
кратно 2, значит число в клетках $(0; 0)$ и
 $(p; p)$ имеют одинаковую четность и
разность кратна и 2 и 3, а значит
она кратна 6, ч.т.д.

70

Значимое возможное кол-во букв: $2n+1$.

Оценка: Если в слове букв больше, чем $2n+1$,

то либо где-то ^{две} буквы повторяются, либо какая-то буква встречается ^{более} чем n раз. В первом случае буквы, которые встречаются n раз, образуют слово, а буквы, которые встречаются $n+1$ раз, образуют слово.

Во втором случае буквы, которые встречаются n раз, образуют слово, а буквы, которые встречаются $n+1$ раз, образуют слово.

Из слова вы буквы, кроме тех, которые образуют слово (суммарно) и тех, которые образуют слово (суммарно).

Если у нас есть буквы, которые образуют слово (суммарно) и тех, которые образуют слово (суммарно).

Получим всего $\frac{p(n+1)}{p(n)+p(n)}$ и еще n -кол-во букв I-го типа, и n -кол-во букв II-го типа, то есть $\frac{p(n+1)}{p(n)+p(n)} = 20$. Далее приведем таблицу, где 1- буквы II-го типа, 0- буквы I-го типа.

Изнач. перестановка	Получившаяся строка
0 0 0 1 1 1	0 0 1 1
0 0 1 0 1 1	0 0 1 1
0 0 1 1 0 1	0 0 1 1
0 0 1 1 1 0	0 0 1 1
0 1 0 0 1 1	0 0 1 1
0 1 0 1 0 1	0 0 1 1
0 1 0 1 1 0	0 0 1 1
0 1 1 0 0 1	1 1 0 0
0 1 1 0 1 0	1 1 0 0
0 1 1 1 0 0	1 1 0 0
1 0 0 0 1 1	0 0 1 1
1 0 0 1 0 1	0 0 1 1
1 0 0 1 1 0	1 1 0 0
1 0 1 0 0 1	1 1 0 0
1 0 1 0 1 0	1 1 0 0
1 0 1 1 0 0	1 1 0 0
1 1 0 0 0 1	1 1 0 0

№ 9 (продолжение)

1 1 0 0 1 0	5,6	1 1 0 0
1 1 0 1 0 0	3,4	1 1 0 0
1 1 1 0 0 0	3,4	1 1 0 0

Получается, что как бы ни стояли буквы в слове, оно коротким не будет.

значит что не более 1-й буквы
73 раз. 25