

Региональный этап ВсОШ

по математике 2021 год

1 день

Шифр: 903

Таблица для жюри

	1	2	3	4	5	Сумма
по	7	0	X	X	X	7
от	7	0.5	X	X	X	7.5

9.1. Предположим, что ослику обязательно удастся составить два треугольника, один - из трёх жёлтых палочек, а другой - из трёх зелёных. Тогда невозможно привести пример, где палочки будут такой длины, что ему не удастся составить такие треугольники.

Рассмотрим вариант такой, что изначально ослик составил первый треугольник из палочек длиной равной 5 см, 4 см и 2 см, а второй - из палочек длиной 5 см, 5 см и 1 см. Для обоих таких треугольников выполняется неравенство треугольника: $5\text{ см} < 4\text{ см} + 2\text{ см}$, $4\text{ см} < 5\text{ см} + 2\text{ см}$, $2\text{ см} < 5\text{ см} + 4\text{ см}$ и $5\text{ см} < 5\text{ см} + 1\text{ см}$, $5\text{ см} < 5\text{ см} + 1\text{ см}$, $1\text{ см} < 5\text{ см} + 5\text{ см}$. Значит, такие треугольники и вправду могли быть составлены. Теперь узнаем, какие палочки будут покрашены в зелёный цвет, а какие - в жёлтый. $\underbrace{5\text{ см} = 5\text{ см} = 5\text{ см}}_{\text{зелёные}} > \underbrace{4\text{ см} > 2\text{ см} > 1\text{ см}}_{\text{жёлтые}}$

Далее ослик должен составить два треугольника, один - из трёх зелёных палочек, а другой из трёх жёлтых. Рассмотрим неравенство треугольника для трёх жёлтых палочек: $2\text{ см} < 4\text{ см} + 1\text{ см}$, $1\text{ см} < 4\text{ см} + 2\text{ см}$, но $4\text{ см} \nless 1\text{ см} + 2\text{ см}$, а значит неравенство треугольника для палочек жёлтого цвета не выполняется, следовательно из 3 жёлтых палочек такой длины ослику не удастся составить треугольник. Итак, наше предположение неверно, значит ослику не обязательно удастся это сделать.

Ответ: нет, не обязательно.

9. 2. $\begin{cases} x \neq 0, \\ y \neq 0, \\ x^2 - x > y^2, \\ y^2 - y > x^2. \end{cases}$

Рассмотрим два случая: когда $x = y$ и когда $x \neq y$.

1) $x = y \Rightarrow xy = x^2 > 0 \Rightarrow xy > 0$.

Подберем такую пару (x, y) , удовлетворяющую системе 1.

$x = -1, y = -1$.

$-1 \neq 0$, верно; $-1 \neq 0$, верно; $1 - (-1) > 1$, верно; $1 - (-1) > 1$, верно.

Значит произведение xy может иметь положительный знак.

2) $x \neq y$. Система 1 симметрична относительно перемешивания x и y , следовательно если она не будет иметь решений при $x > y$, то она также не будет иметь решений при $y > x$. Далее рассмотрим случай, где $x > y$. Тогда у нас есть 2 варианта: $x > 0, y > 0$ и $x > 0, y < 0$;

Пусть $x = n + k, y = n$, где $n > 0, k > 0$

$y^2 - y > x^2$

$n^2 - n > (n + k)^2$

$n^2 - n > n^2 + 2nk + k^2 \mid -n^2$

$-n > 2nk + k^2$, неверно при всех $n > 0, k > 0 \Rightarrow$

Система 1 не имеет решений при всех $x \neq y$ и

$x > y$ и $x > 0, y > 0$.

или $x < -y$ или $x \leq -y$
Пусть $x = n, y = -n + k$ или $x = n, y = -n - k$,
где $n > 0, k > 0$ или где $n > 0, k \geq 0$

$\begin{cases} x^2 - x > y^2 \\ y^2 - y > x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - x > y^2 \\ n^2 - n > (-n + k)^2 - (-n + k) \\ n^2 - n > n^2 + 2nk + k^2 - n + k \\ -n > 2nk + k^2 - k \end{cases}$

$-n > 2nk + k^2 - k$, неверно

при всех $n > 0, k \geq 0$

$-k > 0$, неверно при

всех $n > 0, k > 0 \Rightarrow$ Система 1

не имеет решений

при всех $x \neq y$ и $x > 0, y < 0$.

Значит Система 1 имеет решение только в случае 1, тогда $xy > 0$ всегда.

Ответ: только положительный.

Пусть $x = 1, y = -1$, но это не всегда 1)

Региональный этап ВсОШ

по математике 2021 год

2 день

Шифр: 903

Таблица для жюри

1 6	2 7	3 8	4 9	5 10	Сумма
7	0 2 8	X	7	X	19 4
Жюри 7	5 4	X	7	X	19 4
7		X	7	X	

9.6. Предположим, что все 30 цифр оказались нечётными. Тогда в разряде единиц каждого из чисел a , b и c будет стоять нечётное число, значит. Так как при сложении натуральных чисел перенос в следующий разряд может быть только начинающийся разряда десятков, то чётность цифры в разряде единиц числа с одинакова с чётностью суммы цифр в разряде единиц чисел a и b . Обозначим такую сумму как $(2n+1)+(2k+1)$, где $n, k \in \mathbb{Z}$ и $n \geq 0, k \geq 0$, $(2n+1)$ - цифра в разряде единиц числа a (нечётная), $(2k+1)$ - цифра в разряде единиц числа b (нечётная). Тогда $(2n+1)+(2k+1) = 2(n+k+1)$ — чётное число, а значит чётность цифры в разряде единиц числа с одинакова с чётностью суммы $2(n+k+1)$, то цифра в разряде единиц числа с чётная. Значит, предположение неверно и все 30 цифр не могут оказаться нечётными. Следовательно нечётными могут оказаться не более 29 цифр. +

Приведём пример: $3777777777 + 3777777777 = 7555555554$. Здесь 29 цифр оказались нечётными. Так как нечётными могут оказаться не более 29 цифр, то ~~то~~ 29 — наибольшее количество из их 30 цифр, которые оказались нечётными. 75

Ответ: 29.

9. 7 Если два числа отличаются на 3, то их остаток от деления на 3 одинаков. При делении числа на 3 можно получить 3 остатка: 0, 1 и 2. Значит каждое из чисел будет относиться к одной из трёх групп (по остатку от деления на 3). При ~~сравнении~~ сопоставлении натуральных чисел имеют различные остатки от деления на 3 ~~$3n, 3n+1, 3n+2$~~ ^{$3n$} ~~здесь $n \geq 0$~~ $(3n+1, 3n+2, 3n+3, \text{ где } n \in \mathbb{Z}, n \geq 0)$, всего чисел у нас 81, а значит в каждой группе будет по $\frac{81}{3} = 27$ чисел, стоящих в соседних по стороне клетках. В таблице 9×9 есть 4 угловые клетки, но группы (которые можно представить как непрерывные цепочки из чисел, где соседние отличаются на 3) только 3, значит какая-то из групп будет иметь ~~не~~ по числу не менее чем в двух угловых клетках. Рассмотрим такую группу (цепочку). Она имеет числа в двух угловых клетках, (или более). Две угловые клетки могут располагаться по горизонтали (вертикали) или по диагонали. В первом случае между ними будет кратчайшее расстояние в 7 клеток, а во втором — 15. Возьмём во внимание отрезок (часть) цепочки, соединяющей две угловые клетки. Он выходит из одного угла и направляется во второй. В процессе движения он может идти в сторону второго угла ~~и~~ (уменьшить расстояние к нему в противоположную сторону (увеличить расстояние к нему)). Трёхзначным числом расстояние равно 7 (или 15, если клетки стоят по диагонали), а в конце оно должно быть равно 0. Значит путь можно описать ~~уникальной~~ ^{$= \text{путь}$} суммой указательных путей и сделанных ходов, которая равняется нулю. Далее $\pm$ — это плюс или минус, а n — количество сделанных ходов за весь путь.

$$1) 7 \pm \underbrace{1 \pm 1 \pm \dots \pm 1}_{n \text{ раз}} = 0$$

$$2) 15 \pm \underbrace{1 \pm 1 \pm \dots \pm 1}_{n \text{ раз}} = 0.$$

Так как числа 7 и 15 нечётные, а 0 — чётное, то количество n единиц будет чётным, а значит между двумя угловыми клетками всегда нечётное количество ходов. Однако отрезок (гаст) змейки, соединяющий две угловые клетки, включает в себя и сами угловые клетки, значит количество клеток в таком отрезке всегда будет чётным.

Пусть в первой угловой клетке записано число a , тогда пройдя по отрезку (гасту) змейки, соединяющему её со второй угловой клеткой, во второй угловой клетке будет записано число, которое отличается от a на $(n-1)(\pm 3)$, причём оба этих числа будут натуральными ($n-1$ — чётное число т.к. n — чётное) и натуральное, поэтому заменим его на $2k$, где k — натуральное число.

Первая угловая клетка содержит число a .

Вторая угловая клетка содержит число $a \pm 6k$.

Рассмотрим разность: $a - (a \pm 6k) = \pm 6k$, делится на 6; или $(a + 6k) - a = 6k$, делится на 6. Итак, обязательно найдётся такая группа чисел (змейка), которая включает в себя хотя бы две угловые клетки, разность чисел в которых будет кратна 6. Значит, обязательно найдётся две угловые клетки, разность чисел в которых делится на 6.

Ответ: да, верно.

~~5~~

9. 9) Предположим, что хорошее слово может состоять из $2n+2$ букв. Предположим, что в таком слове нет буквы, повторяющейся более 2 раз. Тогда в слове не более $2n$ букв $\Rightarrow$ предположение 2) неверно, значит есть буква, повторяющаяся хотя бы 3 раза.

I. Рассмотрим случай, когда буква a повторяется ровно 3 раза.

3) Предположим, что среди оставшихся букв нет такой, которая повторялась бы более 2 раз. Тогда всего букв $3 + (n-1) \cdot 2 = 2n+1$, ко у нас $2n+2$ букв в слове $\Rightarrow$ предположение 3) неверно $\Rightarrow$ есть две различные буквы повторяющиеся ^{ровно} 3 и хотя бы 3 раза. Тогда мы можем ~~выб~~ брать все буквы, кроме 3 a и 3 букв, повторяющихся хотя бы 3 раза (b), и получим одну из следующих ситуаций:

• нет одинаковых букв рядом: $ababab \Rightarrow aabbb$

• две одинаковых буквы рядом: $aaabab \Rightarrow aabbb$

• три одинаковых буквы рядом $\rightarrow baabbb \Rightarrow aabbb$ $\Rightarrow$ В случае предположения 1)

(и наоборот, от перестановки результат не меняется)

$\rightarrow aabbbb \Rightarrow aabbb$ (неверно. (тогда до $n+1$, и более две буквы добавляются рядом))

II. Рассмотрим случай, когда буква a повторяется более 3 раз (4 и более).

4) Предположим, что среди оставшихся букв нет такой, которая повторяется 2 раза. Тогда всего букв не более $(n-1) + (n+1) = 2n$, ко у нас $2n+2$ букв $\Rightarrow$ предположение 4) неверно $\Rightarrow$ есть буквы b , повторяющаяся ровно 2 раза (если она будет повторяться хотя бы 3 раза, то слово перестанет быть хорошим, доказано в пункте I).

5) Предположим, что среди оставшихся букв нет такой, которая повторяется 2 раза. Тогда всего букв не более $(n-2) + (n+1) + 2 = 2n+1$, ко у нас $2n+2$ букв $\Rightarrow$ предположение 5) неверно $\Rightarrow$ есть буква c , повторяющаяся ровно 2 раза (по окончании с буквой b).

Тогда мы можем убрать из слова все буквы и получить одну из следующих ситуаций:

• Буквы b и c вместе $\rightarrow \overset{b}{b}\overset{c}{c}a\overset{a}{a}\overset{a}{a} \rightarrow cca$
 $\overset{a}{a}\overset{b}{b}\overset{a}{a}\overset{c}{c}baa \rightarrow bba$ $\rightarrow \overset{a}{a}\overset{b}{b}\overset{c}{c}a\overset{a}{a}\overset{a}{a} \rightarrow bba$
 $\overset{a}{a}\overset{a}{a}\overset{b}{b}\overset{c}{c}ba \rightarrow bba$

• Буквы b и c не вместе $\rightarrow \overset{b}{b}\overset{a}{a}\overset{c}{c}\overset{a}{a}\overset{b}{b}a \rightarrow cca$

и подробнее (от перестановки
результат не меняется)

$\Rightarrow$ Во II случае предположение
1) неверно.

Итак, предположение 1) неверно $\Rightarrow$ хорошее слово может состоять не более чем из $2n+1$ букв.

Предположим такой вариант расстановки $2n+1$ букв, при котором слово всегда будет хорошим.

Пусть некоторая буква a повторяется в слове 3 раза, а все остальные буквы $(n_2, n_3, \dots, n_k) - 2$ раза.

Расставим их так: $a n_2 n_3 n_4 \dots n_k a n_2 n_3 n_4 \dots n_k a$.

Предположим, что можно вычеркнуть из такого слова буквы так, чтобы получить не хорошее "слово", т.е. чтобы получить один из следующих вариантов: 1. $a a n_k n_k$, 2. $n_k n_k a a$, 3. $n_k n_k n_i n_i$.

Варианты 1. и 2. одинаковы, т.к. слово симметрично относительно центральной буквы a . Рассмотрим вариант 1. В такой ситуации

Для того чтобы две буквы a оказались рядом необходимо: убрать одну из частей $n_2 n_3 n_4 \dots n_k$, тогда останется вариант, например, "слово" $a a n_2 n_3 n_4 \dots n_k a$, но $n_2, n_3, \dots, n_k$ - различные буквы $\Rightarrow$ не удастся получить вариант $a a n_k n_k \Rightarrow$ варианты 1. и 2. невозможны.

Рассмотрим вариант 3. Для того, чтобы две буквы n_k стояли

рядом, необходимо убрать часть слова $p_{k+1} p_{k+2} \dots p_n a p_2 p_3 \dots p_{k-1}$,
 тогда получим ^{"слово"} $a p_2 p_3 \dots p_k p_k p_{k+1} p_{k+2} \dots p_n a$. ~~Чтобы получить~~
~~полученное слово симметрично относительно~~ В паузен-
 ном "слове" остались лишь две пары одинаковых букв: a и a , p_k и p_k .
 Значит, мы не сможем получить вариант 3. $p_k p_k p_i p_i$. Проверим,
 можно ли Проверим, можно ли сделать из полученного "слова"
 кхорошее. П.к. все p_i , которые остались, не повторяются, их
 можно убрать. Получим ^{хорошее} "слово" $a p_k p_k a$. ~~З~~ Убрав любую из букв
 мы не оставили возможности сделать из полученного слова
 хорошее. Значит, наш пример является хорошим словом,
 состоящим из наименьшего количества букв. Значит наибольшее
 количество букв в хорошем слове - это $2n+1$.

P.S. Здесь "слова" называется некоторая последовательность букв,
 в которой любые две соседние буквы могут быть одинаковы.

Ответ: $2n+1$.

75