

Региональный этап ВсОШ

по математике 2021 год

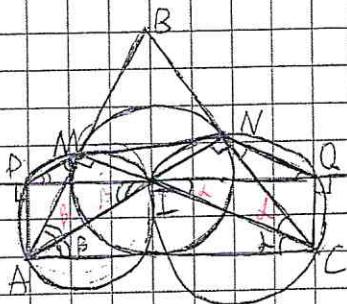
2 день

Шифр: 1108

Таблица для жюри

1 6	2 7	3 8	4 9	5 10	Сумма
7	7	7	x	x	21
7	7	7	x	x	21 ДА

N7.



Пусть $\angle ICA = \alpha$, а $\angle IAC = \beta$.

Потому, $\angle ICB = \angle ICA = \alpha$, а $\angle IAC = \angle IAB = \beta$
(т.к. I - центр вписанной окружности $\Rightarrow$
 $\Rightarrow AI$ и CI - биссектрисы $\angle$
углов BAC и BCA)

$PQ \parallel AC$ (по условию). $PI \in PQ$ и $IQ \in PQ \Rightarrow PI \parallel AC$ и $IQ \parallel AC \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle PIA = \angle IAC = \beta$ и $\angle QIC = \angle ICA = \alpha$ (накрест лежащие углы).

$\angle API = 90^\circ$ (по условию); $IM \perp AB$ (т.к. M - точка касания вписанной окружности стороны AB), $\Rightarrow \angle API = \angle IMA = 90^\circ \Rightarrow$ четырехугольник $APMI$ вписанный $\Rightarrow$ $\angle PMI = \angle PAI$ (т.к. эти углы опираются на одну и ту же дугу PI).

$APMI$ - вписан $\Rightarrow \angle MPI = \angle MAI$ и $\angle PMA = \angle PIA$ (т.к. эти пары углов опираются на одну и ту же дугу MI и AP соответственно).

$\angle CQI = 90^\circ$; $IN \perp BC$ (т.к. N - точка касания вписанной окружности стороны BC). $\angle CQI = \angle INI = 90^\circ \Rightarrow$ $INQC$ - вписанный четырехугольник.

$INQC$ - вписан $\Rightarrow \angle QNC = \angle QIC$ и $\angle NQI = \angle NCI$ (т.к. эти пары углов опираются на одну и ту же дугу QC и NI соответственно).

$\angle NIQ = 180^\circ - \angle INQ - \angle IQN = 180^\circ - (90^\circ + \alpha) - \alpha = 90^\circ - 2\alpha$.
(т.к. $\angle CNQ = \angle NQI = \alpha$)

$\angle MIP = 180^\circ - \angle PMI - \angle IPM = 180^\circ - (90^\circ + \beta) - \beta = 90^\circ - 2\beta$.
(т.к. $\angle PMA = \angle MPI = \beta$)

$\angle MIN = 180^\circ - \angle MIP - \angle NIQ = 180^\circ - (90^\circ - 2\beta) - (90^\circ - 2\alpha) = 2\alpha + 2\beta$
(т.к. $\angle PIQ = \angle MIP + \angle MIN + \angle NIQ$ - развернутый, равен 180°).

$MI = IN$ (радиусы вписанной окружности) $\Rightarrow \triangle MIN$ - равнобедренный $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle IMN = \angle INM \Rightarrow 2 \cdot \angle IMN + \angle MIN = 180^\circ$

$\angle IMN = \frac{180^\circ - \angle MIN}{2} = 90^\circ - \alpha - \beta$.

$\angle PMN = \angle PMI + \angle IMN = (90^\circ + \beta) + (90^\circ - \alpha - \beta) = 180^\circ - \alpha$.

четырехугольник

$\angle NQP = \alpha \Rightarrow \angle PMN + \angle NQP = 180^\circ \Rightarrow PMNQ$ - вписанный четырехугольник

$\Rightarrow$
т.к. P, M, N, Q - лежат на одной окружности.

7 баллов

№6

По условию, число 1 должно стоять рядом с числом 4, т.к. $4+1=3$ (здесь и далее „рядом“ значит в соседней по стороне клетке).

Рядом с числом 4^{еще} стоит 7, а слева — число 10, и так далее. ~~до 13~~

Таким образом образуется цепочка, рядом стоящих чисел, начинающаяся на 3, начинающаяся в 1, и заканчивающаяся в числе 79 (т.к. $79-1=78=26 \cdot 3$, а $82 \geq 81$ и $79=1+3 \cdot 26$; ~~82=1+3 \cdot 27 > 81~~, а всего чисел в таблице ~~82~~ от 1 до 81).

Все числа в этой цепочке имеют одинаковый остаток при делении на 3, равный 1 (т.к. все числа в ней записываются как $1+3 \cdot k$, $k \in \mathbb{Z}$). Чисел в этой цепочке будет 27, т.к. все числа в ней имеют вид $1+3 \cdot k$, $k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k \leq 26$.

Во второй таблице есть похожие цепочки, начинающаяся с числа 2 и заканчивающаяся 80 (все числа имеют остаток 2 при делении на 3, 27 чисел в цепочке), ~~и~~, и начинающаяся с 3 и ~~оканчивающаяся~~ заканчивающаяся на 81 (все числа кратны 3, 27 чисел в цепочке). Итого, все числа таблицы принадлежат одной из 3 цепочек.

Заметим, что так как число в таблице 4, а цепочек 3, то хотя бы в двух из цепочек будут стоять элементы одной цепочки. Рассмотрим эту цепочку.

Пусть x — ~~какое~~ число, стоящее в одной из цепочек, тогда ~~какое~~ тогда число, стоящее в другой охватенной цепочке будет равно $x+3 \cdot k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Попытаемся „пройти“ от числа x до числа $x+3k$: шагом будет являться переключение к следующему элементу в цепочке. Если ~~этот~~ текущий элемент находится в одной строке со следующим, то это будет шагом по горизонтали, а ~~иначе~~ иначе — шагом по ~~горизонтали~~ вертикали.

Пусть $k = m + n$, где m — число шагов по горизонтали, а n — по вертикали. Тогда, если два числа находятся в одной строке, то $n=0$ и n — равно, т.к. ~~то~~ должно быть равное кол-во шагов вверх и вниз по вертикали, чтобы ~~прийти~~ прийти в ту же строку. Если числа находятся в разных строках, то n также равно, ведь ~~клетка~~ разность кол-ва шагов по вертикали вверх и вниз должна быть равна 8, чтобы прийти в другую крайнюю строку. Значит, n всегда равно.

Аналогично ~~для~~ ~~таблица~~ ~~таблица~~, т.к. также будет верно, ведь таблица является квадратом ~~таблица~~.

Значит, m и n четны, а значит и $k = m + n$ четно.

Если же первой буквой идет b , то поменяем в оставшихся словах буквы a на b и наоборот (это сделать можно, так как букв a и b по 3). Тогда, повторив предыдущие действия, также можно будет получить ~~буквы~~ $aabb$ или $bbaa$, то есть при $n=3$ слово не может быть хорошим.

Если же $n \geq 4$, то заметим, что так как соседние буквы ~~не должны быть~~ разными, то при данном N $na \leq \frac{N}{2}$, ~~а при~~, ~~т.к. можно~~ а при некотором N $na \leq \frac{N+1}{2}$.

Далее заметим, что есть хотя бы одна буква, встречающаяся два раза, ведь иначе ~~то~~ длина слова не превосходит $na+n-1 \leq \frac{N}{2}+n-1 < N$, т.к. $N \geq 2n+2$.

Пусть буква, встречающаяся большего всего раз (кроме a) это b , тогда $nb \geq 2$. Если $nb \geq 3$, то ~~этот случай эквивалентен~~ предыдущему (т.к. можно взять любые 3 буквы a и b).

Иначе, если $nb=2$, то удалим все буквы, ~~стоящие~~ которые стоят между b и буквами b .

Оценим кол-во оставшихся букв a : если ~~было~~ ^{стало} меньше ~~менее~~ 3 букв a , то было удалено не ~~более~~ чем $N-nb-2 = N-4$.

$N-4 \geq 2n+2-4 = 2n-2 = 2(n-1) > 2(n-2)$ — противоречие, т.к. можно

было удалено максимум $2(n-2)$ букв (т.к. a и b — самые частые буквы, $na=3, nb=2$).

Значит остается не менее 3 букв a . Тогда, ^{какой-то} удалив ~~если~~ с одной стороны ^{от} стоит одна буква a , то удалим ~~ее~~, ~~а также~~ и получим последовательность вида $a \dots a b b$, ~~хотя и~~ если удалим все кроме двух букв a , то будет получено $a a b b$ — значит слово не хорошее. Если с ~~одних~~ ^{обеих} сторон стоит не менее 2 букв a , то удалив с одной из сторон все буквы a и повторив предыдущую операцию, получим $a a b b$ — значит слово не хорошее.

Таким образом, при $N \geq 2n+2$ всегда можно получить $a a b b$.

Значит $N \leq 2n+1$. При $N=2n+1$, ~~можно~~ хорошее слово получается

~~таким~~ таким образом: $a_1 a_2 a_3 \dots a_n a_1 a_2 \dots a_n a_1$, где a_i —

i -ая буква алфавита. Значит макс. длина — $2n+1$.

7 баллов

Региональный этап ВсОШ

по математике 2021 год

1 день

Шифр: 1108

Таблица для жюри

1	2	3	4	5	Сумма
7 Ф.А.	7 Ф.А.	65 ² Jet	X	X	20
7	7	6	x	x	20

Jet

М1.

Пусть при делении на 40 и 625 ^{наше число} даёт остаток r . Тогда наше число можно записать в виде $K_1 \cdot 40 + r$ и $K_2 \cdot 625 + r$, где K_1 — ~~целое число~~, ^{целое число} полученное при делении на 40, а K_2 — ^{целое число} полученное при делении на 625 ~~нашего числа~~. Тогда, $K_1 \cdot 40 + r = K_2 \cdot 625 + r$

$$K_1 \cdot 40 = K_2 \cdot 625 \quad K_1 \cdot 8 = K_2 \cdot 125 \quad \frac{K_1 \cdot 8}{125} = K_2$$

K_1 и K_2 — целые числа, значит, так как при делении $K_1 \cdot 8$ на 125 получается целое число и 8 взаимно просто с 125 ($8=2^3$, $125=5^3$), K_1 делится на 125.

Тогда пусть $K_1 = 125 \cdot K_1'$ ^{где K_1' — целое число}. Значит, наше число можно записать в виде $K_1' \cdot 125 \cdot 40 + r = 5000 \cdot K_1' + r$.

П.к. r — ~~целое~~ ^{целое} число и $0 \leq r < 40$ (т.к. r — остаток при делении нашего числа на 40), то наше число в разряде тысяч может иметь только цифры 0 (при четном K_1') и 5 (при нечетном K_1').

Например, если наше число равно 200000, то при делении на 40 и 625 оно даёт остаток 0, а в разряде тысяч имеет 0.

Если взять число 1005000, то при делении на 40 и 625 оно даёт остаток 0, а в разряде тысяч имеет цифру 5.

(Ответ: 0, 5. **7 баллов**)

М2. Заметим, что так как $y^4 - x^4 > y$, то $x^4 - y^4 < -y$,
а $x^4 - y^4 > x$ по условию, откуда $-y > x^4 - y^4 > x$, то
есть $-y > x$. **1 б.**

Поскольку x и y — ненулевые числа, то их произведение не может быть равно 0. Значит оно либо больше 0, либо меньше 0, то есть либо имеет знак +, либо -. **+**

Возможны всего 4 варианта выбора x и y : $x > 0$ и $y > 0$; $x > 0$ и $y < 0$; $x < 0$ и $y > 0$; $x < 0$ и $y < 0$. Рассмотрим их и посмотрим, каковы по знаку может быть произведение x и y .

1) $x > 0$ и $y > 0$ — не удовлетворяют исходным неравенствам, т.к. должно выполняться $-y > x$, но при $x > 0$ и $y > 0$ $-y < 0 < x$, это противоречит неравенству $-y > x$. **+**

2) $x > 0$ и $y < 0$ — также не подходит, т.к. $-y > x \Rightarrow y^4 > x^4$ ($-y > 0$ и $x > 0 \Rightarrow$ неравенство можно возвести в четную степень). $x^4 - y^4 < 0 < x$, однако по условию $x^4 - y^4 > x$ — противоречие. **+**

3) $x < 0$ и $y > 0$ — также не подходит, т.к. $-y > x \Rightarrow y < -x \Rightarrow$

$\Rightarrow y^4 < x^4$ (так $y > 0$ и $-x > 0 \Rightarrow$ неравенство можно возвести в четную степень).

$y^4 - x^4 < 0 < y$, однако по условию $y^4 - x^4 > y$ — противоречие. **+**

4) $x < 0, y < 0$ - этот случай возмозжен, например, при $x=y=-1$.
 $x^4 = y^4 = (-1)^4 = 1 \Rightarrow x = -1, y^4 - x^4 = 1 - 1 = 0 \Rightarrow y = -1$.

Получаем, что единственный возмозный случай - когда $x \leq 0$ и $y \leq 0$, а в таком случае произведение x и y неотрицательно, то есть имеет знак $+$.

Ответ: $+$.

МЗ. 7 баллов

Запишем формулу для каждого ненулевого квадратного трехчлена:

пусть в $\mathbb{R}_2$ $f(x) = ax^2 + bx + c$ - функция, задающая параболу,

проходящую через точки $(i; 0)$ и $(j; 0)$ ($0 \leq j < i \leq 100$) и

касательная к которой $y = -1$. Т.к. $f(i) = f(j) = 0$, то i и j - корни

квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow$ по теореме Виета $\frac{b}{a} = -(i+j)$, а

$\frac{c}{a} = ij$ по т. Виета. Многочлен $A(x)$ представим в виде

$a(x-i)(x-j)$. Т.к. $f(x) = -1$ в одной точке, то дискриминант

уравнения $a(x-i)(x-j) + 1 = 0$ равен 0. $ax^2 - a(i+j)x + aij + 1 = 0$

$D = a^2(i+j)^2 - 4a(aij + 1) = a^2(i^2 + j^2 + 2ij - 4ij) - 4a = a^2(i-j)^2 - 4a = 0$

т.к. $a \neq 0$ $a(a(i-j)^2 - 4) = 0$ т.к. $a \neq 0$ (т.к. $A(x)$ - квадратный трехчлен),

то $a(i-j)^2 - 4 = 0$ $a = \frac{4}{(i-j)^2}$ ($i-j \neq 0$ т.к. $i > j$). Корнями

этого уравнения $f(x)$ представим в виде $f(x) = \frac{4}{(i-j)^2}(x-i)(x-j)$

$f(x) = \frac{4}{(i-j)^2}(x^2 - (i+j)x + ij) = \frac{4}{(i-j)^2}x^2 - \frac{4(i+j)}{(i-j)^2}x + \frac{4ij}{(i-j)^2}$

Т.к. $x_0 = x_1 = \frac{i+j}{2}$, где x_0 - вершина параболы,

(т.к. $x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{i+j}{2}$ (т.к. по т. Виета $-\frac{b}{a} = i+j$), а

в вершине $f(x_0) = -1$, то $f(x) = a(x-x_0)^2 - 1 = \frac{4}{(i-j)^2}(x - \frac{i+j}{2})^2 - 1$.

Рассмотрим уравнение пересечения двух парабол:

зад. условием $\frac{4}{(i_1-j_1)^2}(x - \frac{i_1+j_1}{2})^2 - 1 = \frac{4}{(i_2-j_2)^2}(x - \frac{i_2+j_2}{2})^2 - 1$, где

i_1, j_1 - корни первой параболы, а i_2 и j_2 - корни второй параболы.

Преобразуем данное равенство, получим:

$$\left(\frac{x - \frac{i_1 + j_1}{2}}{i_1 - j_1} \right)^2 = \left(\frac{x - \frac{i_2 + j_2}{2}}{i_2 - j_2} \right)^2 \quad \frac{x - \frac{i_1 + j_1}{2}}{i_1 - j_1} = \pm \left(\frac{x - \frac{i_2 + j_2}{2}}{i_2 - j_2} \right)$$

Если $i_1 - j_1 = i_2 - j_2$ или $\frac{i_1 + j_1}{2} = \frac{i_2 + j_2}{2}$, то это уравнение имеет только один корень, в остальных же случаях оно имеет ровно два корня. Отсюда, для каждой пары могло быть записано ~~либо~~ только число 1 или 2. Пусть было x уравнений с одним корнем, тогда с двумя корнями было $1990 - x$ уравнений, а сумма кол-ва корней тогда будет равна $x + 2(1990 - x) = 3980 - x$. Если полученная сумма равна 3969, то $x = 101$. Значит, чтобы получить сумму 3969, должна быть 101 пара квадратных трехчленов, у которых сумма или разность точек ~~на оси Ox~~ равна 0, через которые ~~они~~ ^{на оси Ox} ~~проведены~~ ^{проведены} их градиенты.

П.к. ~~всегда~~ ^{только} отмечены точки от 0 до 100, может быть не более 100 различных разностей (от 1 ~~до~~ ^{до} 100, 0 не может быть т.к. всегда выбираются две различные точки). Выбрав 200 пар точек, значит есть не менее ~~100~~ пар равных разностей / т.к. много, останутся как минимум две пары точек, эти разности не должны быть равны ~~и~~ ^и ~~таковыми~~ ^{таковыми}, однако это невозможно, т.к. различных разностей всего 100).

Заметим, что ~~разность~~ ^{разность} 100 может быть получена единственным способом (0 и 100), а значит ей пара не могла быть поставлена, значит есть хотя бы одна тройка одинаковых разностей, которая даёт 3 пары одинаковых разностей.

Баллов