

Региональный этап ВсОШ

по математике 2021 год

1 день

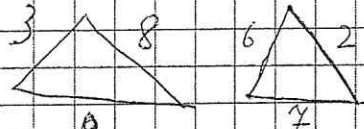
Шифр: 1002

Таблица для жюри

1	2	3	4	5	Сумма
75	75	75	0	X	21
75	75	75	0	X	21
			+ 1 жюри		22 жюри

10.1) Ответ: для длинных ^{обязательно} можно, для коротких не всегда.

Пример для коротких палочек, которые нельзя выстроить в Δ -к:



Во второй группе есть - 9

С палки длиной 2, 3 и 6. Но $6 > 3 + 2 \Rightarrow$ нерав. Δ -ки не выполн. $\Rightarrow \Delta$ -к составить нельзя

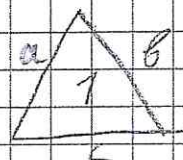
Док-во для длинных палочек:

Пусть в Δ -ках не более 2-ух длинных палочек, иначе ~~нельзя~~ Δ -к из 3-х палочек уже ~~можно~~ построен.

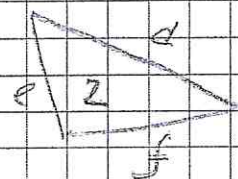
Без потери общности, пусть (см. рис)

a, b и d - длинные палочки, c, e и f - короткие.

Тогда a, b и $d \geq c, e$ и f .



Т-м нерав. Δ -ка для Δ -ка 2: $d \leq e + f \leq a + b$



Т-м нерав. -ва Δ -ка для Δ -ка 1: $a \leq b + c \leq b + d$

$$b \leq a + c \leq a + d$$

Имеем: $\begin{cases} d \leq a + b \\ a \leq b + d \\ b \leq a + d \end{cases}$ Для чисел a, b и d выполн. неравенства Δ -а $\Rightarrow \Delta$ -к можно построить.

10.3) Предположим, что S - конечно.

Имеем, что $a = \frac{b(3c-5)}{15}$. Также по условию: $b = \frac{d(3e-5)}{15}$,

где d и $e \in S$ (а может быть даже равны a или b).

Тогда $a = \frac{d(3e-5)(3c-5)}{15^2}$. Аналогично мы можем прое-
хоть с буквой d и так далее.

Продолжение $\rightarrow$

10.3 продолжение)

Поскольку кол-во элементов в S конечно, кол-во, то ~~какая-то~~ когда-то мы след. буквой получим ту, которая уже встречалась нам. Но продолжая такую операцию мы через некоторое кол-во ходов вновь возвращаемся к этой букве, т.е. получим некоторый цикл.

Пусть $x_1, \dots, x_k$ — буквы, получающиеся в цикле (цикл состоит из k букв). Тогда на каких-то двух шагах мы получим, что $a = \frac{x_1 \epsilon_1 \dots \epsilon_k}{15^p}$ и $a = \frac{x_1 \epsilon_1 \dots \epsilon_{p+k}}{15^{p+k}}$, где

$\epsilon_1, \dots, \epsilon_p, \dots, \epsilon_{p+k}$ — некоторые ~~цифры~~ множители вида $3 \cdot 5$. ~~Заметим~~, что $\epsilon_1, \dots, \epsilon_k$ не дел. на 3 ($3 \cdot 4 : 3, +5 : 3$). Тогда все ~~три~~ тройки знаменателя обязаны сократиться. Пусть x_1 имеет в разложении на пр. множители 3^s . Тогда, в первом случае, a имеет в разложении 3^{s-p} , а во втором 3^{s-p-k} , что невозможно, т.к. это одно и то же число. $\Rightarrow$

$\Rightarrow S$ не может быть конечным.

(10.2) Предположим, что x могло оказаться отриц.

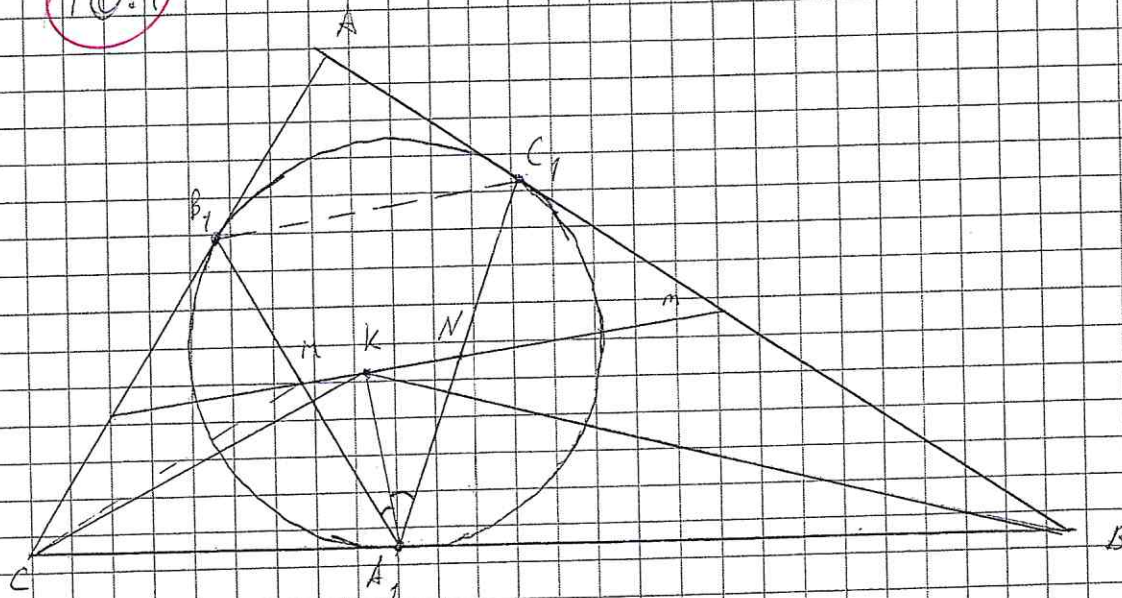
Тогда x и y — разн. знаков без потери общности, пусть $x > 0$ $y < 0$.

Р-м ~~выясн~~ неравенство: $x^4 - y^4 > x$; $x > 0 \Rightarrow x^4 - y^4 > 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow |x| > |y|$

Р-м сумму неравенств: $0 > x + y$ ~~и~~ $-y > x$, т.е. $|y| > |x|$

$|x| > |y|$
 $|y| > |x|$, т.е. $|x| > |x|$, что невозможно $\Rightarrow xy$ не отриц.

10.9



Пусть M и N — середины B_1A_1 и C_1A_1 соотв. Тогда $CMNB$ — впис., т.к. CM — мед. в $\triangle B_1CA_1$ ($CB_1 = CA_1$) $\Rightarrow \angle CMA_1 = 90^\circ$, $\angle MMA_1 = \angle C, B_1A_1$ ($B_1C_1 \parallel m$) $= \angle C, A_1B$ (CB — кас.) $= 90^\circ - \beta$;
 ~~$\angle B = \alpha$~~ $\angle CBN = \beta$ (BN — мед. в $\triangle A_1BC_1$, а след. и впис.);
 $\angle CMN + \angle CBN = \angle CMA_1 + \angle A_1MN + \angle CBN = 90^\circ + 90^\circ - \beta + \beta = 180^\circ$.
 $(\angle B = 2\beta)$

медиан
и центр

ОБ.

Региональный этап ВсОШ
по математике 2021 год

2 день

Шифр: 1002

Таблица для жюри

1 6	2 7	3 8	4 9	5 10	Сумма
7m	7m	7	x	x	21
7	7	7	x	x	21

10.6) a имеет 10 цифр, b имеет 10 цифр, $a+b$ может иметь 10 или 11 цифр (сумма минимальных: $10^9 + 10^9 = 2 \cdot 10^9$ — 10 цифр; сумма максимальных: $(10^{10}-1) + (10^{10}-1) = 2 \cdot 10^{10} - 2$ — 11 цифр). Тогда на доске всего 30 или 31 цифра.

Оценка: неч. цифр ≤ 30 . Предположим противное: неч. цифр на доске может быть 31. Такое возможно, если a и b имеют по 10 неч. цифр, $a+b$ имеет 11. Но a и b состоят всего из 10 цифр $\Rightarrow a$ и b оканч. на неч. $\Rightarrow$ они неч. Но тогда $a+b = \text{неч.} + \text{неч.} = \text{чет.}$, т.е. $a+b$ содержит хотя бы одно чет. ~~цифру~~ цифру на конце. Тогда в $a+b$ не более 10 неч. цифр и не может быть 11 цифр. Противоречие.

Пример: 9999999999, 5555555555, 15555555554

Ответ: 30 цифр.

10.7) Ответ: Да, верно

Надём в таблице числа 1, 2 и 3 и ~~и a и b и c и d и e и f и g и h и i и j и k и l и m и n и o и p и q и r и s и t и u и v и w и x и y и z~~ ~~и a и b и c и d и e и f и g и h и i и j и k и l и m и n и o и p и q и r и s и t и u и v и w и x и y и z~~ покрасим в 3 розн. цвета. Далее будем закрашивать клеточки в таблице „змейкой” таким образом: для закраш. числа i закрашим в этот же цвет число $i+3$. Когда мы закончим раскрашивать табл., то получим 3 разноцвет. непересекающиеся „змейки”, которые накроют всё поле. Причём каждое число в некоторой „змейке” имеет одинаковые остатки по $\text{mod } 3$. Условных клеток 4, а змеек $3 \Rightarrow$ каждая-то змейка закрашена хотя бы 2 клетками.

И-м эти условные клетки. Теперь покрасим доску в шахматном порядке ~~суммарная~~ ~~цветная~~ ~~первая~~ продолжение $\rightarrow$

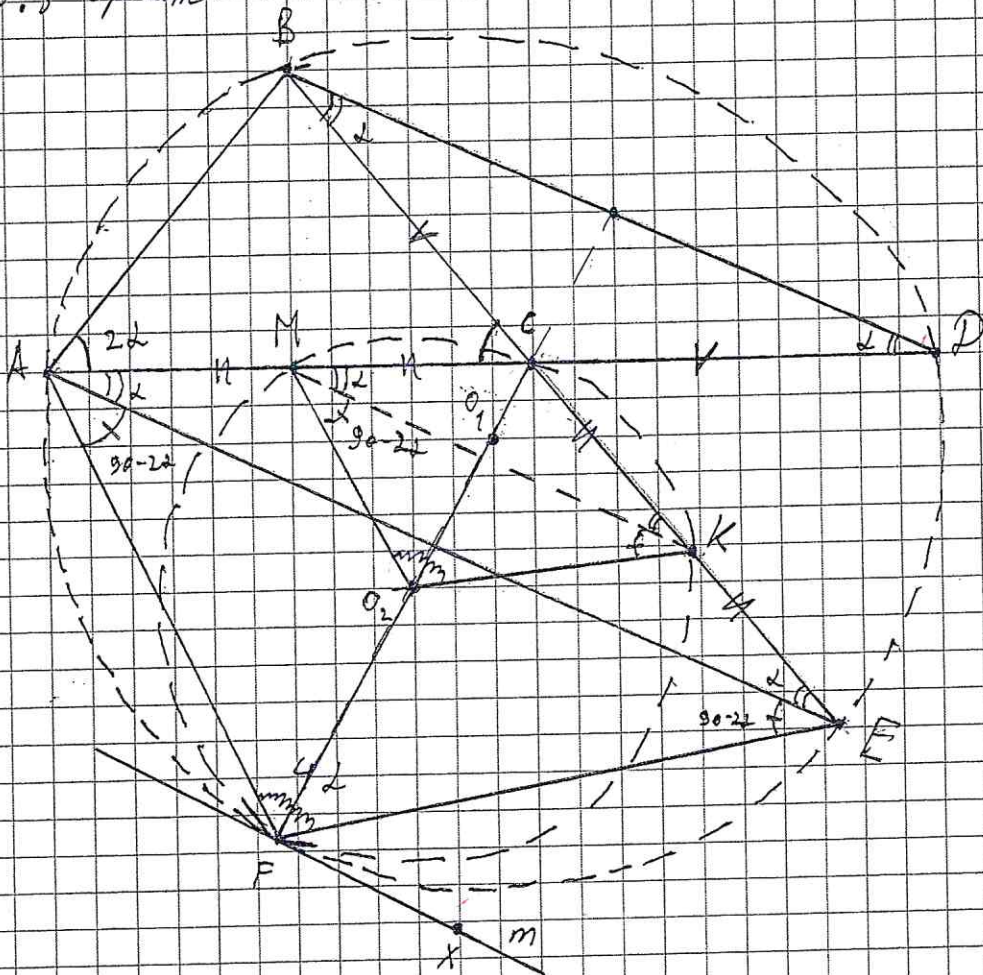
10.7) (продолжение)

Поскольку мы покрасили условную клетку чёрными и белые клетки доски в обе стороны нечётным, то все условные клетки - чёрные, в том числе и рассматриваемые нами. Чтобы «змейка» из чёрной клетки в след. ^{клетки} прошла через белую, причём из белой «змейка» всегда дальше идёт в чёрную. Пусть в первой клетке было число t , при переходе в белую оно становится $t+3$, при переходе в след. чёрную будет число $t+6$, т.е. остаток t по модулю 6 остался таким же. Таким образом, числа одной змейки в чёрных клетках имеют одинаковые остатки, а разность любых двух из них $\div 6$. Это верно и для рассматриваемых условных клеток.

10.8) (чертёж на листе 3)

Возьмём т. Е на продолжении луча ВК такую, что $AC = CE$. Т-м степерь точки С отн. окружности около Δ -ка ABD (далее назовём окр-ть ω_{ABD}): $BC \cdot CE = AC \cdot CD$;
 $\frac{BC}{CD} = \frac{AC}{CE} = 1 \Rightarrow$ раз точки А, В и D леж. на ω_{ABD} , то и Е лежит на ней. Пусть $\angle ACB = 2\alpha$, тогда сразу $\angle CBD = \angle CDB = \alpha$, тогда $\angle BEA = 2$ центр. на хорду АВ вместе с $\angle CDB$) $\Rightarrow BD \parallel AE$,
~~на ω_{ABD}~~ $ABDE$ - $\pi/6$ трап., т.к. $BD \parallel AE$ и $ABDE$ - впис. $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ сер. пер. к AE и BD совпадают, проведём его. Сер. пер. к BD проходит через С - пересеч. диагоналей $ABDE$, середину AE ,
 середину MK ($MK \parallel AE$ как ср. линия, $AM = KE \Rightarrow MAEK$ - $\pi/6$ трап.),
 центр $\omega_{ABD} = O_1$, центр окр-ти около MCK (далее ω_{MCK}) $= O_2$ (трап. $\rightarrow$

10.3 чертёж и proof



... проходит через O_2 (м.х. сер. пер. к AE и MK совпадают, м.х. $AMKE$ - впис. трап.) и через $F = O_1 O_2 \cap W_{ABD}$. $AF = FE$, м.х. F лж. на сер. пер. к $AE \Rightarrow \angle FAE = \angle FEA$. Проведём прямую $m \parallel AE$ через $m.F$; $\angle FAE = \angle FEA = \angle EFH \Rightarrow m$ кас. к W_{ABD} в $m.F \Rightarrow O_1 F \perp FX$, но O_1, O_2, F лж. на одной прямой $\Rightarrow O_2 F \perp FX$.

Тогда, если W_{ABD} и W_{MCK} имеют общую точку, то m - общая кас. к W_{ABD} и W_{MCK} , что возможно, только если ок-ты кас-ся.

Начнём же ок-ты действ. имеют общую точку? Р-м $ACEF$ и $MCEF$: $\angle AFE = 4\alpha$ ($ABEF$ - впис., $\angle ABE = 180 - 4\alpha$) $\Rightarrow \angle FAE = \angle FEA = 90 - 2\alpha$. $\angle O_2 K = 4\alpha$ ($= 360 - 2\angle MCK$) $\Rightarrow \angle O_2 MK = \angle O_2 KM$ ($O_2 M = O_2 K$)

10⁸ (всё ещё)

... ($O_2M = O_2K$ как радиусы шмек); $\angle CAM = \angle CMK = \angle CAE = 2$;

$$\left. \begin{aligned} \angle FAE + \angle BAC &= 90 - 2 \\ \angle CMK + \angle O_2MK &= 90 - 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow AF \parallel MO_2, \text{ аналогично } O_2K \parallel FE.$$

Тогда, сделав гомотею в т. С с коэф. 2, получим:

1) т. М перешла в т. А и т. К перешла в т. Е.

2) т. К. $AF \parallel MO_2$ и $EF \parallel KO_2$, то O_2 перейдет в F. Тогда

$$\cancel{CF} = CF = 2 O_2C = 2 \cdot r, \text{ где } r - \text{радиус шмек}; O_2F = CF - O_2C =$$

$$= 2r - r = r, \text{ т.е. } F \text{ лж. на шмек. Тогда } F - \text{общая точка}$$

$\omega_{МК}$ и $\omega_{АВД}$ ^{поскольку} ~~и тогда~~ условие на общую точку выполняется, то т - общая кас. ~~шмек~~ окружностей $\Rightarrow \omega_{МК}$ касается $\omega_{АВД}$, т.к. ~~действительно~~

~~1008 Кривизна, радиусы не могут~~

