

Региональный этап ВсОШ

по математике 2021 год

1 день

Шифр: 1011

Таблица для жюри

1	2	3	4	5	Сумма
75 75	75 75	X	X	X	14
7 ₀₁	7 ₀₁	X	X	X	14

~~Доказательство $xy \leq 0$ если x и y различные знаки, т.е.
 $x < 0 < y$ или $y < 0 < x$.~~

~~a) $\frac{1}{2} \text{ л} \times \frac{1}{2} \text{ л} = \frac{1}{4} \text{ л}$ — это количество воды, которое вытекает из крана за 1/4 л.~~

~~$x - y \geq 0$ и x -отрицательны отнимаем от отрицательного x положительное число y .~~

~~$$X = \text{openly } (T, R) \quad X \leq 0 \leq U$$~~~~$$(x^3 + x^2 + x + 1)$$~~

а) Рассмотрим при $x \rightarrow 0$

~~$$x \neq 0 \Rightarrow \text{off } \alpha_s = \text{row } \alpha_s = 0 \text{ row. } 1) \quad (x-y) < x \leq 0 \Rightarrow \left(\begin{matrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ x+x^2 & x^2 & x & y \end{matrix} \right) < 1$$

$$(x \leq 0)$$~~

~~при $(x^3 + y^2 + xy + y^3) < 0$ выражение $(x-y)(x^3 + y^2 + xy + y^3) > 0$ при ч.т.ч. $x > y$~~
~~при $(x^3 + y^2 + xy + y^3) > 0$ выражение $(x-y)(x^3 + y^2 + xy + y^3) < 0$ при ч.т.ч. $x < y$~~
~~при $(x^3 + y^2 + xy + y^3) = 0$ выражение $(x-y)(x^3 + y^2 + xy + y^3) = 0$ при ч.т.ч. $x = y$~~

~~*)
$$\begin{cases} (x-y)(x^3+x^2y+xy^2+y^3) > x \\ (y-x)(x^3+x^2y+xy^2+y^3) > y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x^3+x^2y+xy^2+y^3) > x \\ (y-x)(x^3+x^2y+xy^2+y^3) > y \end{cases}$$~~

$\Rightarrow$ то $|y| \leq |x| \Rightarrow x^3 + x^3 + x^3 + y^3 \leq 0$. (т.к. $xy \leq 0$)
 (рассуждений), заметив что для $x=0$ точка (0,1) не подходит.

Лист № 1 из 3

~~Отв. произведение x_1 не может равняться отрицатель-~~
~~ному числу~~

Смотри продолжение на стр 3

А такого треугольника не существует.
должна сохраниться чертовство (оран)
 $2 > 1+1$ однако $2 = 1+1=2$.

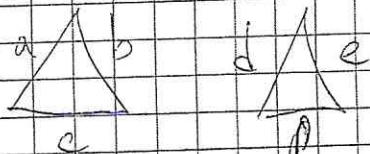
Трёховник из трёх палочек первой группы составов можно

Попробуем от противного: если треугольник не принадлежит составу из палок первой группы, то у палок первой группы нарушено неравенство треугольника, т.е. $a \leq b + c$ (где a, b, c - длины трех палок из первой группы), но если $b + c \geq a$, то $b + c$

На богатейшем уровне составы преподавателей из трех категорий первой группы, например:

Треугольник из трех элементов первой группы однозначно можно составить. Докажем от противного:

допустили после переупорядковки у нас получилось



уменьровки у нас получилось

$\sum_{i=1}^n \frac{d_i}{e_i} \leq \frac{n}{2}$ — расставляем факторы!

где $d \leq e + f$ (т.е. Δe — на треугольнике
треугольник не получился (разбит)) и
 $d, e, f \geq a, b, c \Rightarrow$ мы не можем заменить (элемент) на

(a или b или c) т.к. $a, b, c < e, f$ и d треугольника или по формулам или иначе
не можем ~~и~~ d поставим вместо a или b или c т.к. $e + f > (a + b)$, $(b + c)$, $(a + c)$,
т.к. $e, f, d > a, b, c \Rightarrow$ так как a, b, c, d, e, f изначально не складывались и в начале

Лист № 7 из 3

треугольники. $\Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow$ как и первый случай всегда можно считать

Ответ: Обязательно можно составить треугольник из палок первой группы, не обязательно — из второй.

Д9 ~~$\begin{cases} x^4 > y^4 \\ y^4 > x^4 \end{cases}$~~ $\Rightarrow \begin{cases} (x-y)(x^3+x^2y+xy^2+y^3) > x \\ (y-x)(x^3+x^2y+xy^2+y^3) > y \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^3+x^2y+xy^2+y^3)(x-y) + (y-x)(x^3+x^2y+xy^2+y^3) > x+y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^3+x^2y+xy^2+y^3)(x-y+y-x) > x+y \Leftrightarrow (x^3+x^2y+xy^2+y^3) \cdot 0 > x+y$

$\Leftrightarrow 0 > x+y \Rightarrow \text{невозможно}$

Чтобы произведение xy было меньше 0, нужно чтобы x и y были разными по знаку, т.е. $x < 0 < y$ или $y < 0 \leq x$

Рассмотрим $x < 0 < y$:

$x < 0 < y$ и $0 > x+y \Rightarrow |x| > |y| \Rightarrow x^4 > y^4$

~~$\begin{cases} x^4 > y^4 \\ y^4 > x^4 \end{cases}$~~ $\Rightarrow x^4 - y^4 > 0 > x$ и $y^4 - x^4 < 0 < y$

неравенство выполняется только $y^4 - x^4 > y \Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow$
 $\Rightarrow xy$ не может быть отрицательным числом.

Ответ: произведение xy не может равняться отрицательному числу.

Д5. При правильной игре контролирует Петя своим первым ходом. Петя проводит одну из центральных диагоналей (одну из самых длинных диагоналей).

Региональный этап ВсОШ

по математике 2021 год

2 день

Шифр: 1011

Таблица для жюри

1	2	3	4	15	Сумма
45	45	45	X	X	208
7 _ж	7 _ж	6 _ж	X	X	20 _ж

ные, и с модой делая по стороне трещина только карные, мы можем сде-
 лать вывод, что если в какой-то клетке одного цвета ~~содержится~~
~~только один цвет, то это значит, что в этой клетке содержится только один цвет~~
~~только один цвет, то это значит, что в этой клетке содержится только один цвет~~
 столько в остальных клетках, то же цвета можно представить как $3 \cdot l + f + 3 \cdot h$.

Лист № 2 из 5

т.к. же остаток при делении на 3 если стоят в одной и той же цепи. Мы доказали, что ~~в каждой~~ в 2-х условных клетках числа дают один и тот же остаток при делении на 3 $\Rightarrow$ эти два числа из одной и той же цепи. В одной цепи 10 одной цепи стоящие на клетках ~~одного~~ ~~одного~~ цвета отличаются на 3. l (где l - четное и $l \neq 0$), т.к. из клетки четного цвета можно перейти только в клетку нечетного цвета и наоборот $\Rightarrow$ ~~клетки~~ ^{числа} из одной цепи, стоящие в одном цвете (при шахматной раскраске) в разности дают число кратное трем и кратное двум $\Rightarrow$ кратное шести. И две такие условные клетки точно есть $\Rightarrow$ Ответ: обязательно найдётся две условные клетки, разность чисел в которых делится на 6. *

Зад. 56. Рассмотрим суммы цифр ~~цифры~~ (нечётная цифра, чётная цифра)

~~нечётная цифра~~ ~~нечётная цифра~~

$$\begin{aligned} 1+1 &= 2 & (\text{без перехода единиц с суммой предыдущих}) \\ 4+4 &= 8 & (\text{разрядов в числе}) \\ 1+4 &= 5 & (\text{если эти две суммы больше или равны 10-ти, то они дают переход единицы на сумму следующего разряда в числе}) \end{aligned}$$

при переходе в разряде переходит максимум 1. т.к. $9+9=18$ и $9+9+1=19$ ^{для промежуточного перехода}

$$\begin{aligned} 1+1+1 &= 3 & (\text{с переходом единицы с суммой предыдущих}) \\ 4+4+1 &= 9 & (\text{или разрядов в числе}) \\ 1+4+1 &= 6 \end{aligned}$$

с предыдущим разрядом (3. самая большая цифра)

Проанализировав эти суммы видим, что больше всего n -чисел будет при переходе единицы с суммой предыдущих разрядов в классах и суммы ~~нечётных~~ ~~нечётных~~ цифр т.е. возникает $n+n+1=n$ (где 3 нечётные цифры), но заметим что в ~~разряде~~ ^{сумме разряда} единицы в числе не может быть никакого перехода единицы с суммой предыдущих разрядов в числе (т.к. единица - самый маленький разряд в натуральных числах) $\Rightarrow$ выходящее будет востребовано суммы $1+1=2$ или $1+4=5$ (будет одинаковое кол-во чётных и нечётных чисел) $\Rightarrow$ мы уже вывели схему сложения.

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

или 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

- отбрасывание
лишних разрядов

Всего 30 нечётных цифр

Всего 30 нечётных цифр

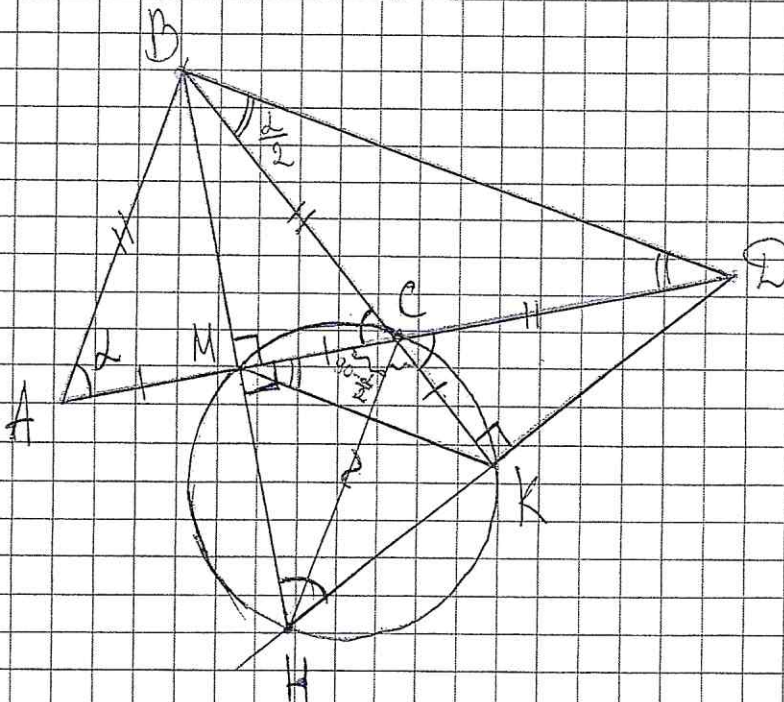
Примеры:
9 9 9 9 9 9 9 9 9 9
9 9 9 9 9 9 9 9 9 9
1 9 9 9 9 9 9 9 9 8

9 9 9 9 9 9 9 9 9 9
9 9 9 9 9 9 9 9 9 8
1 9 9 9 9 9 9 9 9 7

Больше нечётных цифр быть не может, т.к. в разрядах единиц по модулю 2 будет хотя бы одно чётное число (т.к. там ~~каждый~~ нет перехода единиц с суммы предыдущих разрядов) и всего цифр может быть выписано 31 (т.к. 10 в числе а, 10 в числе б, а в сумме а+б может быть 10 или 11 цифр (одинке сверху $999...9 + 999...9 = 199...98$, а число $99...9$ - самое большое десятизначное)).

Ответ: ~~30~~ нечётных максимум 30 нечётных цифр можно быть выписано на доске

58.



Дано:
 $\triangle ABC$ - равнобедр. (AC - основание)
 M - середина AC
 AD, BE - высоты и $CM = CK$,
 $BC = CD$

Доказать: опис. $\omega_{\triangle MCK}$
касается опис. $\omega_{\triangle ABD}$.

18. Доказательство:

1) $\triangle ABC$ - равнобедренный (AC - основание) $\Rightarrow AB = BC$ $\Rightarrow$ BM - медиана, высота и биссектриса в равнобедренном $\triangle ABC \Rightarrow \angle BMC = 90^\circ$, $\triangle ABM = \triangle BCM$ (по катету и гипотенузе)

2) $CM = CK$ (по усл.), $AD = BK$ (по усл.), $BC = CD$ (по усл.) $\Rightarrow \angle BMC = \angle DKC$ (по I признаку) $\Rightarrow \angle DKC = 90^\circ$ (т.к. $\angle BMC = 90^\circ$)

3) Проведем DK из точки K до пересечения с опис. $\omega_{\triangle CMK}$, пусть это пересечение будет точкой H . Тогда, т.к. DK - прямая (по построению) $\Rightarrow \angle CKH = 180^\circ - \angle DKC = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ (по св. смежных углов).

4) Соединим точки H и M , получим вписанный в опис. $\omega_{\triangle CMK}$ четырехугольник $CMHK \Rightarrow$ т.к. $CMHK$ вписан в окружность, то по свойству $\angle CMH + \angle CKH = 180^\circ \Rightarrow \angle CMH = 180^\circ - \angle CKH = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ \Rightarrow \angle BMC + \angle DMH = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow$ BH - прямая.

5) Пусть $\angle BAC = \angle$, тогда т.к. $\triangle ABM = \triangle BCM$ то $\angle BAC = \angle BCA = \angle$. $\angle BCA = \angle DCK = \angle$, $\angle BCD = 180^\circ - \angle DCK = 180^\circ - \angle$ (по св. смежных углов) $\Rightarrow$ в $\triangle BCD$ ($BC = CD$ по усл.) $\Rightarrow \angle DBC = \angle BDC$, $\angle DBC = \angle BDC = (180^\circ - \angle BCD) : 2 = (180^\circ - (180^\circ - \angle)) : 2 = \angle : 2$.

Посмотрим на $BDKM$: он вписан в окружность, т.к. $\angle BMD = \angle BKD$ (по признаку вписанного четырехугольника, стороны 4-угольника вписаны из двух других вершин под одинаковым углом) $\Rightarrow$ (по такому же свойству) $\angle BDK = \angle DMK = \angle : 2$.

6) $\triangle CMH = \triangle CKH$ (по катету и гипотенузе), т.к. $CM = CK$ (по усл.), CH - общая сторона и $\angle CKH = \angle CMH = 90^\circ \Rightarrow \angle MCH = \angle HCK = \angle MCK : 2 = \angle BCD : 2 = (180^\circ - \angle) : 2 = 90^\circ - \angle : 2$ (т.к. $\angle BCD$ и $\angle MCK$ - смежные) $\Rightarrow \angle CMH = \angle KHC = 90^\circ - \angle MCH = 90^\circ - (90^\circ - \angle : 2) = 90^\circ - 90^\circ + \angle : 2 = \angle : 2$ (по идее углов в прямом Δ) $\Rightarrow \angle BHD = \angle CMH + \angle KHC = \angle : 2 + \angle : 2 = \angle \Rightarrow$

по св. впис. 4-угольника "сторона 4-угольника видна из 2-х других вершин под одинаковым углом" $ABDH$ - вписан в окруж. (т.к. $\angle BAD = \angle = \angle BHD$) $\Rightarrow$

опис. $\omega_{ABDH} =$ опис. ω_{ABD} } опис. ω_{ABD} и опис. $\omega_{\triangle CMK} = H$
опис. $\omega_{CMHK} =$ опис. $\omega_{\triangle CMK}$ }
 $\Downarrow$
опис. ω_{ABD} касается опис. $\omega_{\triangle CMK}$

на $ABDH$ и $CMHK$ хорды CH и BK пересекаются в центре окружности